PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE
Nouvelle série, tome 9 (23), 1969, pp. 167—176

EIN ALGORITHMUS ZUR BESTIMMUNG DER JORDANSCHEN NORMALFORM

Helmut Boseck

(Dargestellt am 31. Mai, 1968.)

Es wird ein Algorithmus erörtert, der mit möglichst geringen Voraussetzungen aus der Algebra eine Berechnung der Jordanschen Normalform eines linearen Operators oder der ihm zugeordneten Matrix gestattet. Die Grundlage der Betrachtungen bildet die Diskussion des Bildes des singulären Operators $A-\lambda_i E$, wobei λ_i einen Eigenwert von A bezeichnet. Die Überlegungen lassen sich rechnerisch durch die Frage nach nichttrivialen Lösungen gewisser linearer Gleichungssysteme realisieren, deren rechte Seiten von endlich vielen Parametern abhängen. Die Koordinaten der Lösungen bestimmen die Spalten der Transformationsmatrix. Wie kaum anders zu erwarten, erhält man keine Aussage über die Einzigkeit der gewonnenen Normalform. Die auftretenden oberen Indices verweisen auf die Numerierung der Eigenwerte des betrachteten Operators, die unteren Indices unterscheiden die verschiedenen "Jordan-Kästchen" zu gleichem Eigenwert. Zur Motivierung läßt sich bemerken, daß man zunächst versucht eine obere Dreieckmatrix zu gewinnen, in der dann möglichst viele Elemente zu Null gemacht werden.

1. *Voraussetzungen.* Es sei V ein Vektorraum der Dimension n über dem Körper K. Ferner sei A ein linearer Operator auf dem Vektorraum V. Mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $(r \leqslant n)$ seien die verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ des Operators A bezeichnet. Es sei vorausgesetzt, daß die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Elemente des Grundkörpers K sind und $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda-\lambda_r)^{n_r}$ ist. Dabei bezeichnen $n_1, \ldots, n_r$ die Vielfachheiten der verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, und es ist $n=n_1+\cdots+n_r$.

2. *Problemstellung.* Es ist eine Basis des Vektorraumes V successive so zu bestimmen, daß dem Operator A in Bezug auf diese Basis eine Normalform entspricht.

3. *Die Anfangsschritte.*[1]

$\left(0_1^{(1)}\right)$ Man löse die Eigenwertgleichung $(A-\lambda_1 E)x=0$ für den Eigenwert λ_1. Diese Gleichung besitzt eine nichttriviale Lösung $x_{11}^{(1)} \in V$. Es sei

[1] Es genügt, den Anfangsschritt $\left(0_1^{(1)}\right)$ und den allgemeinen Schritt anzugeben. Die übrigen hier aufgeführten Schritte $\left(1_1^{(1)}\right)$, $\left(0_2^{(1)}\right)$ und $\left(0_1^{(2)}\right)$ sind nur zur Veranschaulichung des Verfahrens eingefügt.

$W_{11}^{(1)} = L(x_{11}^{(1)})$ der von diesem Eigenvektor erzeugte Teilraum und $W_{01}^{(1)} = (o)$ der Nullraum. Es ist $W_{11}^{(1)}$ ein bezüglich A invarianter eindimensionaler Teilraum.

Man untersuche $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{11}^{(1)}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha x_{11}^{(1)}$ und unterscheide die Fälle:

a) $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{11}^{(1)} = W_{11}^{(1)}$, d.h. die Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha x_{11}^{(1)})$ ist für einen Parameterwert $\alpha \neq 0$ lösbar. Dann fahre man mit $(1_1^{(1)})$ fort.

b) $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{11}^{(1)} = W_{01}^{(1)}$, d.h. die Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha x_{11}^{(1)}$ ist nur für $\alpha = 0$ nichttrivial lösbar. Dann setze man $m_1^{(1)} = 1$ und $W_1^{(1)} = W_{11}^{(1)}$. Es ist $W_1^{(1)}$ ein $m_1^{(1)}$ -dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

Ist $m_1^{(1)} < n_1$, so fahre man mit $(0_2^{(1)})$ fort; ist $m_1^{(1)} = n_1$, so fahre man mit $(0_1^{(2)})$ fort und setze $W^{(1)} = W_1^{(1)}$. Es ist $W^{(1)}$ ein n_1-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

$(1_1^{(1)})$ Man löse die lineare Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha x_{11}^{(1)}$ für einen Parameterwert $\alpha \neq 0$.

Diese Gleichung besitzt für einen Wert $\alpha^{(1)} \neq 0$ eine nichttriviale Lösung $x'_{21} \in V$. Dann ist $x_{21}^{(1)} = \frac{1}{\alpha^{(1)}} x'_{21}$ eine Lösung der Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = x_{11}^{(1)}$.

Es sei $W_{21}^{(1)} = W_{11}^{(1)} + L(x_{21}^{(1)})$ und $W_{21}^{(1)}$ ist ein bezüglich A invarianter zweidimensionaler Teilraum.

Man untersuche $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{21}^{(1)}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha_1 x_{11}^{(1)} + \alpha_2 x_{21}^{(1)}$, und unterscheide die Fälle:

a) $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{21}^{(1)} = W_{21}^{(1)}$, d.h. die Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha_1 x_{11}^{(1)} + \alpha_2 x_{21}^{(1)}$ ist für einen Parameterwert $\alpha_2 \neq 0$ lösbar. Dann fahre man mit $(2_1^{(1)})$ fort.

b) $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{21}^{(1)} = W_{11}^{(1)}$, d.h. die Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha_1 x_{11}^{(1)} + \alpha_2 x_{21}^{(1)}$ ist nur für $\alpha_2 = 0$ nichttrivial lösbar. Dann setze man $m_1^{(1)} = 2$ und $W_1^{(1)} = W_{21}^{(1)}$. Es ist $W_1^{(1)}$ ein $m_1^{(1)}$-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

Ist $m_1^{(1)} < n_1$, so fahre man mit $(0_2^{(1)})$ fort; ist $m_1^{(1)} = n_1$, so fahre man mit $(0_1^{(2)})$ fort und setze $W^{(1)} = W_1^{(1)}$. Es ist $W^{(1)}$ ein n_1-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

$(0_2^{(1)})$ Man löse die Eigenwertgleichung $(A - \lambda_1 E) x = 0$ modulo $W_1^{(1)}$ für den Eigenwert λ_1.

Das bedeutet Folgendes: Man berechne eine Lösung der linearen Gleichung $(A - \lambda_1 E) x = \alpha_1 x_{11}^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1^{(1)}} x_{m_1^{(1)} 1}^{(1)}$, die nicht in $W_1^{(1)}$ liegt. Wegen der Relation $(A - \lambda_1 E) V \cap W_{m_1^{(1)} 1}^{(1)} = W_{m_1^{(1)} - 11}^{(1)}$ besitzt diese Gleichung nur für $\alpha_{m_1^{(1)}} = 0$ eine nichttriviale Lösung. Aus der Ungleichung $m_1^{(1)} < n_1$ folgt die Existenz einer nichttrivialen Lösung $x'_{12} \in V$, die nicht in $W_1^{(1)}$ liegt. Dann ist $x_{12}^{(1)} = x'_{12} - \alpha_1 x_{21}^{(1)} - \cdots - \alpha_{m_1^{(1)}-1} x_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1, der nicht in $W_1^{(1)}$ liegt. Es sei $W_{12}^{(1)} = L(x_{12}^{(1)})$ der von diesem Eigenvektor erzeugte Teilraum und $W_{02}^{(1)} = (0)$ der Nullraum. Es ist $W_{12}^{(1)}$ ein bezüglich A invarianter eindimensionaler Teilraum.

Man untersuche $(A-\lambda_1 E) V \cap W_{12}^{(1)}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)}$, und unterscheide die Fälle:

a) $(A-\lambda_1 E) V \cap W_{12}^{(1)} = W_{12}^{(1)}$, d.h. die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)}$ ist für einen Parameterwert $\alpha \neq 0$ lösbar. Dann fahre man mit $(1_2^{(1)})$ fort.

b) $(A-\lambda_1 E) V \cap W_{12}^{(1)} = W_{02}^{(1)}$, d.h. die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)}$ ist nur für $\alpha = 0$ nichttrivial lösbar. Dann untersuche man die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)} \bmod W_1^{(1)}$. Besitzt die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)} + \alpha_1 x_{11}^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1^{(1)}} x_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ eineLösung für ein $\alpha \neq 0$, so ist auch die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)} + \alpha_{m_1^{(1)}} x_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ für $\alpha \neq 0$ lösbar. Für $\mu = 1, \ldots, m_1^{(1)} - 1$ ist nämlich $x_{\mu 1}^{(1)} = (A-\lambda_1 E) x_{\mu+11}^{(1)}$. Offenbar muß mit α auch $\alpha_{m_1^{(1)}} \neq 0$ sein und für den Vektor $y_{m_1^{(1)}1}^{(1)} = \frac{\alpha}{\alpha_{m_1^{(1)}}} \cdot x_{12}^{(1)} + x_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ gilt $(A-\lambda_1 E) y_{m_1^{(1)}1}^{(1)} = x_{m_1^{(1)}-11}^{(1)}$ und die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha_{m_1^{(1)}} y_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ ist lösbar. In diesem Fall ersetze man in $(m_1^{(1)} - 1)$ den Vektor $x_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ durch $y_{m_1^{(1)}1}^{(1)}$ und fahre dort fort. Die Dimension $m_1^{(1)}$ des invarianten Vektorraumes $W_{11}^{(1)}$ läßt sich dadurch wenigstens um 1 vergrößern.

c) Die Gleichung $(A-\lambda_1 E) x = \alpha x_{12}^{(1)}$ sei mod $W_1^{(1)}$ nur für $\alpha = 0$ lösbar. Dann setze man $m_2^{(1)} = 1$ und $W_2^{(1)} = W_{12}^{(1)}$. Es ist $W_2^{(1)}$ ein $m_2^{(1)}$ -dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

Ist $m_1^{(1)} + m_2^{(1)} < n_1$, so fahre man mit $(0_3^{(1)})$ fort; ist $m_1^{(1)} + m_2^{(1)} = n_1$, so fahre man mit $(0_1^{(2)})$ fort und setze $W^{(1)} = W_1^{(1)} + W_2^{(1)}$. Es ist $W^{(1)}$ ein n_1-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

$(0_1^{(2)})$ Man löse die Eigenwertgleichung $(A-\lambda_2 E) x = 0$ für den Eigenwert λ_2.

Diese Gleichung besitzt eine nichttriviale Lösung $x_{11}^{(2)} \in V$; diese liegt nicht in $W^{(1)}$. $x_{11}^{(2)}$ ist über $W^{(1)}$ linear unabhängig. Es sei $W_{11}^{(2)} = L(x_{11}^{(2)})$ der von diesem Eigenvektor erzeugte Teilraum und $W_{01}^{(2)} = (0)$ der Nullraum. Es ist $W_{11}^{(2)}$ ein bezüglich A invarianter eindimensionaler Teilraum.

Man untersuche $(A-\lambda_2 E) V \cap W_{11}^{(2)}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A-\lambda_2 E) x = \alpha x_{11}^{(2)}$, und unterscheide die Fälle:

a) $(A-\lambda_2 E) V \cap W_{11}^{(2)} = W_{11}^{(2)}$, d.h. die Gleichung $(A-\lambda_2 E) x = \alpha x_{11}^{(2)}$ ist für einen Parameterwert $\alpha \neq 0$ lösbar. Dann fahre man mit $(1_1^{(2)})$ fort.

b) $(A-\lambda_2 E)\, V \cap W^{(2)}_{11} = W^{(2)}_{01}$, d.h. die Gleichung $(A-\lambda_2 E)\, x = \alpha x^{(2)}_{11}$ ist nur für $\alpha = 0$ nichttrivial lösbar. Dann setze man $m^{(2)}_1 = 1$ und $W^{(2)}_1 = W^{(2)}_{11}$. Es ist $W^{(2)}_1$ ein $m^{(2)}_1$-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

Ist $m^{(2)}_1 < n_2$, so fahre man mit $\left(0^{(2)}_2\right)$ fort; ist $m^{(2)}_1 = n_2$, so fahre man mit $\left(0^{(3)}_1\right)$ fort und setze $W^{(2)} = W^{(2)}_1$. Es ist $W^{(2)}$ ein n_2-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

4. *Der allgemeine Schritt.* Es seien die folgenden Vektoren und die dahinter aufgeführten bezüglich A invarianten Teilräume bereits bestimmt

$$
\begin{array}{lll}
\left.\begin{array}{lll}
x^{(1)}_{11}, & \dots, \; x^{(1)}_{m^{(1)}_1 1} & : W^{(1)}_1 \\
 & \vdots & \\
x^{(1)}_{1 s_1}, & \dots, \; x^{(1)}_{m^{(1)}_{s_1} s_1} & : W^{(1)}_{s_1}
\end{array}\right\} W^{(1)} \\[2ex]
\left.\begin{array}{lll}
x^{(2)}_{11}, & \dots, \; x^{(2)}_{m^{(2)}_1 1} & : W^{(2)}_1 \\
 & \vdots & \\
x^{(2)}_{1 s_2}, & \dots, \; x^{(2)}_{m^{(2)}_{s_2} s_2} & : W^{(2)}_{s_2}
\end{array}\right\} W^{(2)} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\left.\begin{array}{lll}
x^{(i-1)}_{11}, & \dots, \; x^{(i-1)}_{m^{(i-1)}_1 1} & : W^{(i-1)}_1 \\
 & \vdots & \\
x^{(i-1)}_{1 s_{i-1}}, & \dots, \; x^{(i-1}_{m^{(i-1)}_{s_{i-1}} s_{i-1}} & : W^{(i-1)}_{s_{i-1}}
\end{array}\right\} W^{(i-1)} \\[2ex]
\begin{array}{lll}
x^{(i)}_{11}, & \dots, \; x^{(i)}_{m^{(i)}_1 1} & : W^{(i)}_1 \\
 & \vdots & \\
x^{(i)}_{1j-1}, & \dots, \; x^{(i)}_{m^{(i)}_{j-1} j-1} & : W^{(j)}_{j-1} \\[1ex]
x^{(i)}_{1j}, & \dots, \; x^{(i)}_{kj} & : W^{(i)}_{kj}
\end{array}
\end{array}
$$

Es ist $m^{(\mu)}_1 + \cdots + m^{(\mu)}_{s_\mu} = n_\mu$ für $\mu = 1, \dots, i-1$.

Die Vektoren $x^{(i)}_{11}, \dots, x^{(i)}_{m^{(i)}_1 1}, \dots, x^{(i)}_{1j}, \dots, x^{(i)}_{kj}$, die zum Eigenwert λ_i gehören, sind linear unabhängig über dem bezüglich A invarianten Teilraum $W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$ der Dimension $n_1 + \cdots + n_{i-1}$. Man untersuche $(A-\lambda_i E) V \cap \cap W^{(i)}_{kj}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A-\lambda_i E)\, x = \alpha_1 x^{(i)}_{1j} + \cdots + \alpha_k x^{(i)}_{kj}$, und unterscheide die Fälle:

a) $(A-\lambda_i E)\, V \cap W^{(i)}_{kj} = W^{(i)}_{kj}$, d.h. die Gleichung $(A-\lambda_i E)\, x = \alpha_1 x^{(i)}_{1j} + + \cdots + \alpha_k x^{(i)}_{kj}$ ist für einen Parameterwert $\alpha_k \neq 0$ lösbar. Dann fahre man mit $\left(k^{(i)}_j\right)$ fort.

b) $(A-\lambda_i E)V \cap W_{kj}^{(i)} = W_{k-1j}^{(i)}$, d.h. die Gleichung $(A-\lambda_i E)x = \alpha_1 x_{1j}^{(i)} + \cdots + \alpha_k x_{kj}^{(i)}$ ist nur für $\alpha_k = 0$ nichttrivial lösbar. Dann untersuche man die Gleichung $(A-\lambda_i E)x = \alpha_1 x_{1j}^{(i)} + \cdots + \alpha_k x_{kj}^{(i)}$ mod $W_1^{(i)} + \cdots = W_{j-1}^{(i)}$. Gibt es eine Lösung mod $W_i^{(i)} + \cdots + W_{j-1}^{(i)}$ mit $\alpha_k \neq 0$, so ist die Gleichung $(A-\lambda_i E)x = \alpha_k x_{kj}^{(i)} = + \beta_1 x_{m_1^{(i)}1}^{(i)} + \cdots + \beta_{j-1} x_{m_{j-1}^{(i)}j-1}^{(i)}$ für $\alpha_k \neq 0$ lösbar. Dabei ist einer der Koeffizienten $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}$, etwa $\beta l \neq 0$ $(1 \leqslant l \leqslant j-1)$, und es sei l so gewält, daß $\beta_{l+1} = \cdots = \beta_{j-1} = 0$ ist. Für den Vektor $y_{m_l^{(i)}l}^{(i)} = \frac{\alpha_k}{\beta_1} x_{kj}^{(i)} + x_{m_l^{(i)}l}^{(i)}$ gilt $(A-\lambda_i E)\, y_{m_l^{(i)}l}^{(i)} = x_{m_l^{(i)}-1,l}^{(i)}$ und die Gleichung $(A-\lambda_i \mathrm{E})x = \beta_1 y_{m_l^{(i)}l}^{(i)}$ ist lösbar. Man ersetze in $\left(m_l^{(i)}-1\right)$ den Vektor $x_{m_l^{(i)}l}^{(i)}$ durch $y_{m_l^{(i)}l}^{(i)}$ und fahre dort fort. Die Dimension $m_l^{(i)}$ des invarianten Teilraumes $W_l^{(i)}$ läßt sich so wenigstens um 1 erhöhen.

c) Die Gleichung $(A-\lambda_i E)x = \alpha_1 x_{1j}^{(i)} + \cdots + \alpha_k x_{kj}^{(i)}$ sei mod $W_1^{(i)} + \cdots + W_{j-1}^{(i)}$ nur für $\alpha_k = 0$ lösbar. Dann setze man $m_j^{(i)} = k$ und $W_j^{(i)} = W_{kj}^{(i)}$. Es ist $W_j^{(i)}$ ein $m_j^{(i)}$-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

Ist $m_1^{(i)} + \cdots + m_j^{(i)} < n_i$, so fahre man mit $\left(0_{j+1}^{(i)}\right)$ fort; ist $m_1^{(i)} + \cdots + m_j^{(i)} = n_i$, so fahre man mit $\left(0_1^{(i+1)}\right)$ fort und setze $W^{(i)} = W_1^{(i)} + \cdots + W_j^{(i)}$, sowie $s_i = j$. Es ist $W^{(i)}$ ein n_i-dimensionaler bezüglich A invarianter Teilraum.

$\left(k_j^{(i)}\right)$ Man löse die lineare Gleichung $(A-\lambda_i E)x = \alpha_1 x_{1j}^{(i)} + \cdots + \alpha_k x_{kj}^{(i)}$ für einen Parameterwert $\alpha_k \neq 0$. Diese Gleichung besitzt für die Werte $\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{k-1}^{(i)}$, $\alpha_k^{(i)} \neq 0$ eine Lösung $x'_{k+1j} \in V$. Dann ist $x_{k+1j}^{(i)} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)}}\left(x'_{k+1j} - \alpha_1^{(i)} x_{2j}^{(i)} - \cdots - \alpha_{k-1}^{(i)} x_{kj}^{(i)}\right)$ eine Lösung der linearen Gleichung $(A-\lambda_i E)x = x_{kj}^{(i)}$. Es sei $W_{k+1j}^{(i)} = W_{kj}^{(i)} + L\left(x_{k+1j}^{(i)}\right)$; dann ist $W_{k+1j}^{(i)}$ ein bezüglich A invarianter $(k+1)$-dimensionaler Teilraum.

Es ist zu beweisen, daß die Vektoren $x_{11}^{(i)}, \ldots, x_{m_1^{(i)}1}^{(i)}, \ldots, x_{1j}^{(i)}, \ldots, x_{kj}^{(i)}$, $x_{k+1j}^{(i)}$ über dem Teilraum $W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$ linear unabhängig sind.

Aus der Relation $\gamma_{11} x_{11}^{(i)} + \gamma_{21} x_{21}^{(i)} + \cdots + \gamma_{m_1^{(i)}1} x_{m_1^{(i)}1}^{(i)} + \cdots + \gamma_{1j} x_{1j}^{(i)} + \gamma_{2j} x_{2j}^{(j)} + \cdots + \gamma_{kj} x_{kj}^{(i)} + \gamma_{k+1j} x_{k+1j}^{(i)} \in W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$ folgt durch Anwendung des Operators $A-\lambda_i E$ und unter Berücksichtigung der Gleichungen $(A-\lambda_i E)\, x_{1\nu}^{(i)} = 0$, $(A-E)\, x_{\rho\nu}^{(i)} = x_{\rho-1\nu}^{(i)}$ für $\rho > 1$ die Beziehung $\gamma_{21} x_{11}^{(i)} + \cdots + \gamma_{m_1^{(i)}1} x_{m_1^{(i)}-11}^{(i)} + \cdots + \gamma_{2j} x_{1j}^{(i)} + \cdots + \gamma_{kj} x_{k-1j}^{(i)} + \gamma_{k+1j} x_{kj}^{(i)} \in W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$. Die hier auftretenden Vektoren sind aber nach Voraussetzung linear unabhängig über $W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$, und es ist $\gamma_{21} = \cdots = \gamma_{m_1^{(i)}1} = \cdots = \gamma_{2j} = \cdots \gamma_{kj} = \gamma_{k+1j} = 0$. Aus dem gleichen Grunde ergibt sich, daß auch die Koeffizienten der verbleibenden Relation $\gamma_{11} x_{11}^{(i)} + \cdots + \gamma_{1j} x_{1j}^{(i)} \in W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$ sämtlich verschwinden $\gamma_{11} = \cdots = \gamma_{1j} = 0$.

Man untersuche $(A-\lambda_i E)\, V \cap W^{(i)}_{k+1j}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A-\lambda_i E)\, x = \alpha_1 x^{(i)}_{1j} + \cdots + \alpha_k x^{(i)}_{kj} + \alpha_{k+1} x^{(i)}_{k+1j}$. U. s. w.

$(0^{(i)}_{j+1})$ Man löse die Eigenwertgleichung $(A-\lambda_i \mathrm{E})\, x = 0$ modulo $W^{(i)}_1 + \cdots + W^{(i)}_j$ für den Eigenwert λ_i. Das bedeutet Folgendes: Man berechne eine Lösung der linearen Gleichung $(A-\lambda_i E)\, x = \alpha_{11} x^{(i)}_{11} + \cdots + \alpha_{m^{(i)}_1 - 11} x^{(i)}_{m^{(i)}_1 - 11} + \alpha_{m^{(i)}_1 1} x^{(i)}_{m^{(i)}_1 1} + \cdots + \alpha_{1j} x^{(i)}_{1j} + \cdots + \alpha_{m^{(i)}_j - 1j} x^{(i)}_{m^{(i)}_j - 1j} + \alpha_{m^{(i)}_j j} x^{(i)}_{m^{(i)}_j j}$, die nicht in $W^{(i)}_1 + \cdots + W^{(i)}_j$ liegt. Da $m^{(i)}_1 + \cdots + m^{(i)}_j < n_i$ ist, gibt es eine nichttriviale Lösung dieser Gleichung $x'_{1j+1} \in V$, die nicht schon in $W^{(i)}_1 + \cdots + W^{(i)}_j$ liegt. Für diese Lösung muß $\alpha_{m^{(i)}_1 1} = \cdots = \alpha_{m^{(i)}_j j} = 0$ sein. Dann ist aber $x^{(i)}_{1j+1} = x'_{1j+1} - \alpha_{11} x^{(i)}_{21} - \cdots - \alpha_{m^{(i)}_1 - 11} x^{(i)}_{m^{(i)}_1 1} - \cdots - \alpha_{1j} x^{(i)}_{2j} - \cdots - \alpha_{m^{(i)}_j - 1j} x^{(i)}_{m^{(i)}_j j}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i, der nicht in $W^{(i)}_1 + \cdots + W^{(i)}_j$ liegt. Es sei $W^{(i)}_{1j+1} = L\left(x^{(i)}_{1j+1}\right)$ der von diesem Eigenvektor erzeugte Teilraum und $W^{(i)}_{0j+1} = (0)$ der Nullraum. Es ist $W^{(i)}_{1j+1}$ ein bezüglich A invarianter eindimensionaler Teilraum.

Es bleibt zu zeigen, daß die Vektoren $x^{(i)}_{11}, \ldots, x^{(i)}_{m^{(i)}_1 1}, x^{(i)}_{1j}, \ldots, x^{(i)}_{m^{(i)}_j j}$, $x^{(i)}_{1j+1}$ über dem Teilraum $W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$ linear unabhängig sind. Betrachtet man eine Linearkombination dieser Vektoren und nimmt an, daß der dargestellte Vektor zum Teilraum $W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$ gehört, so folgt durch Anwendung des Operators $A-\lambda_i E$ wie im Schritt $(k^{(i)}_j)$ die Relation $x^{(i)} = \gamma_{11} x^{(i)}_{11} + \cdots + \gamma_{1j} x^{(i)}_{1j} + \gamma_{1j+1} x^{(i)}_{1j+1} \in W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$. Offenbar ist $x^{(i)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i. Es genügt zu beweisen:

Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i liegt nicht in $W^{(1)} + \cdots + W^{(i-1)}$.

Wegen der Invarianz der Räume $W^{(\mu)}$ und sogar ihrer Teilräume $W^{(\mu)}_\nu$ $(\mu = 1, \ldots, i-1;\ \nu = 1, \ldots, s_\mu)$ in Bezug auf den Operator A reduziert sich die Behauptung auf die Aussage: Ist $x^{(\mu)}_\nu \in W^{(\mu)}_\nu$ und Eigenvektor zum Eigenwert λ_i, so ist $x^{(\mu)}_\nu = 0$. Betrachtet man die Gleichungen $x^{(\mu)}_\nu = \gamma_1 x^{(\mu)}_{1\nu} + \gamma_2 x^{(\mu)}_{2\nu} + \cdots + \gamma_{m^{(\mu)}_\nu - 1} x^{(\mu)}_{m^{(\mu)}_\nu - 1\nu} + \gamma_{m^{(\mu)}_\nu} x^{(\mu)}_{m^{(\mu)}_\nu \nu}$ und $0 = (A-\lambda_i E)\, x^{(\mu)}_\nu = (\gamma_1 (\lambda_\mu - \lambda_i) + \gamma_2)\, x^{(\mu)}_{1\nu} + \cdots + (\gamma_{m^{(\mu)}_\nu - 1} (\lambda_\mu - \lambda_i) + \gamma_{m^{(\mu)}_\nu})\, x^{(\mu)}_{m^{(\mu)}_\nu - 1\nu} + \gamma_{m^{(\mu)}_\nu} (\lambda_\mu - \lambda_i)\, x^{(\mu)}_{m^{(\mu)}_\nu \nu}$, so ergibt sich wegen $\lambda_\mu \neq \lambda_i$ für $\mu = 1, \ldots, i-1$ successive $\gamma_{m^{(\mu)}_\nu} = 0$, $\gamma_{m^{(\mu)}_\nu - 1} = 0, \ldots,$ $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$.

Man untersuche $(A-\lambda_i E)\, V \cap W^{(i)}_{1j+1}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A-\lambda_i E)\, x = \alpha x^{(i)}_{1j+1}$. U.s.w.

$(0^{(i+1)}_1)$ Man löse die Eigenwertgleichung $(A-\lambda_{i+1} E)\, x = 0$ für den Eigenwert λ_{i+1}.

Diese Gleichung besitzt eine nichttriviale Lösung $x^{(i+1)}_{11} \in V$, die nach den soeben angestellten Überlegungen nicht in $W^{(1)} + \cdots + W^{(i)}$ liegt. $x^{(i+1)}_{11}$ ist linear unabhängig über $W^{(1)} + \cdots + W^{(i)}$. Es sei $W^{(i+1)}_{11} = L\left(x^{(i+1)}_{11}\right)$ der von diesem Eigenvektor erzeugte Teilraum und $W_{01}^{(i+1)}=(0)$ der Nullraum. Es ist $W_{11}^{(i+1)}$ ein bezüglich A invarianter eindimensionaler Teilraum.

Man untersuche $(A-\lambda_{i+1}E)V\cap W_{11}^{(i+1)}$ oder, was das gleiche ist, die Lösbarkeit der linearen Gleichung $(A-\lambda_{i+1}E)x=\alpha x_{11}^{(i+1)}$. U.s.w.

Zur Erläuterung des Verfahrens geben wir zwei Beispiele an:

1. Im R^4 sei ein linearer Operator A durch folgende Matrix gegeben

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Es ist $\lambda_1=3$ und $n_1=1$. Wir berechnen einen Eigenvektor als Lösung des folgenden homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=0\\ \xi_1+\xi_2+\xi_3-2\xi_4&=0\\ -2\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4&=0\\ -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=0 \end{aligned}\tag{1}$$

$x_{11}^{(1)}=(0,\ -1,\ 1,\ 0)$. Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=0\\ \xi_1+\xi_2+\xi_3-2\xi_4&=-\alpha\\ -2\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4&=\alpha\\ -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=0 \end{aligned}\tag{2}$$

ist für $\alpha=1$ lösbar: $x_{21}^{(1)}=\left(0,\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$. Das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem ist nur für $\alpha_2=0$ lösbar

$$\begin{aligned} -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=0\\ \xi_1+\xi_2+\xi_3-2\xi_4&=-\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2\\ -2\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4&=\alpha_1\\ -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3-\xi_4&=\frac{2}{3}\alpha_2. \end{aligned}\tag{3}$$

Es ist $m_1^{(1)}=2$ und der invariante Teilraum $W_1^{(1)}$ besteht aus allen Vektoren der Form $\left(0,\ -s+\frac{1}{3}t,\ s,\ \frac{2}{3}t\right)$. Der Vektor $x_{12}^{(1)}=(1, 1, 0, 1)$ ist eine Lösung von (1) und gehört nicht zu $W_1^{(1)}$. Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
-\ \xi_1+2\,\xi_2+2\,\xi_3-\ \xi_4&=\alpha\\
\xi_1+\ \xi_2+\ \xi_3-2\,\xi_4&=\alpha\\
-2\,\xi_1+\ \xi_2+\ \xi_3+\ \xi_4&=0\\
-\ \xi_1+2\,\xi_2+2\,\xi_3-\ \xi_4&=\alpha
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ist für $\alpha=1$ lösbar: $x_{22}^{(1)}=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. Es ist $m_2^{(1)}=2$, der invariante Teilraum $W_2^{(1)}$ besteht aus den Vektoren der Form $\left(s+\frac{1}{3}t,\ s+\frac{1}{3}t,\ \frac{1}{3}t,\ s\right)$. Wir haben die folgende Jordansche Normalform erhalten

$$
\begin{Vmatrix}
3 & 1 & 0 & 0\\
0 & 3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 3 & 1\\
0 & 0 & 0 & 3
\end{Vmatrix},
$$

eine Transformationsmatrix ist

$$
\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\\
-1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\
1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\
0 & \frac{2}{3} & 1 & 0
\end{Vmatrix}.
$$

2. Im R^3 sei ein linearer Operator A durch die folgende Matrix gegeben

$$
\begin{Vmatrix}
-1 & 0 & -4\\
4 & 1 & 8\\
1 & 0 & 3
\end{Vmatrix}.
$$

Es ist $\lambda_1 = 1$ und $n_1 = 3$. Wir berechnen einen Eigenvektor aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(1)\qquad \begin{aligned} -2\,\xi_1 - 4\,\xi_3 &= 0 \\ 4\,\xi_1 + 8\,\xi_3 &= 0 \qquad : x_{11}^{(1)} = (0,\ 1,\ 0). \\ \xi_1 + 2\,\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem ist nur für $\alpha = 0$ lösbar

$$(2)\qquad \begin{aligned} -2\,\xi_1 - 4\,\xi_3 &= 0 \\ 4\,\xi_1 + 8\,\xi_3 &= \alpha \\ \xi_1 + 2\,\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Es ist zunächst $m_1^{(1)} = 1$. Wir bestimmen eine von $x_{11}^{(1)}$ linear unabhängige Lösung von (1): $x_{12}^{(1)} = (-2,\ 0,\ 1)$. Das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem ist ebenfalls nur für $\alpha = 0$ lösbar

$$(3)\qquad \begin{aligned} -2\,\xi_1 - 4\,\xi_3 &= -2\,\alpha \\ 4\,\xi_1 + 8\,\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + 2\,\xi_3 &= \alpha, \end{aligned}$$

doch besitzt das Gleichungssystem (3) eine Lösung mod $x_{11}^{(1)}$ für $\alpha = 1$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} -2\,\xi_1 - 4\,\xi_3 &= -2\,\alpha \\ 4\,\xi_1 + 8\,\xi_3 &= \beta \\ \xi_1 + 2\,\xi_3 &= \alpha \end{aligned}$$

ist für $\alpha = 1$ und $\beta = 4$ lösbar. Der Vektor $y_{11}^{(1)} = x_{12}^{(1)} + 4\,x_{11}^{(1)} = (-2,\ 4,\ 1)$ ist eine Lösung von (1) und das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem ist für $\alpha = 1$ lösbar

$$(5)\qquad \begin{aligned} -2\,\xi_1 - 4\,\xi_3 &= -2\,\alpha \\ 4\,\xi_1 + 8\,\xi_3 &= 4\,\alpha \qquad : y_{21}^{(1)} = (-1,\ 0,\ 1). \\ \xi_1 + 2\,\xi_3 &= \alpha \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem

$$(6)\qquad \begin{aligned} -2\,\xi_1 - 4\,\xi_3 &= -2\,\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\,\xi_1 + 8\,\xi_3 &= 4\,\alpha_1 \\ \xi_1 + 2\,\xi_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

ist nur für $\alpha_2 = 0$ lösbar. Als neuen Wert erhalten wir damit $m_1^{(1)} = 2$ und den zweidimensionalen invarianten Teilraum $W_1^{(1)}$, der aus allen Vektoren der Form $(-2\,s - t,\ 4\,s,\ s + t)$ besteht. Der Vektor $y_{12}^{(1)} = (0,\ 1,\ 0)$ ist eine Lösung von (1), die nicht in dem zuletzt bestimmten Teilraum $W_1^{(1)}$ liegt.

Für die Jordansche Normalform ergibt sich damit

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

und als eine Transformationsmatrix erhalten wir

$$\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

LITERATUR

[1] Kurepa, S. and Veselić, K., *Transformation of a matrix to normal forms,* Glasnik matematički, Ser. 3, 2 (1967) 39—51.

[2] Pták, V., *Eine Bemerkung zur Jordanschen Normalform von Matrizen,* Acta Sci. Math., Szeged, 17 (1956) 190—194.

Sektion Mathematik
der Ernst-Moritz-Arndt Univ.
Fr. Mehringstr. 54
DDR 22 Greifswald