PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 4 (18), 1964, p. 135–137.

SUR L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE $2^x - xy = 2$

A. Rotkiewicz et *W. Sierpiński*

(Présenté le 9 mars 1964)

Le but de cette Note est de démontrer d'une façon élémentaire les cinq théorèmes suivants:

Théorème 1. *L'équation*

$$2^x - xy = 2 \tag{1}$$

a une seule solution en nombres premiers x et y notamment $x=3$, $y=2$.

Démonstration. Pour $x=2$ on trouve de (1) $y=1$, ce qui n'est pas un nombre premier. Or, si x est un nombre premier >2, y est pair, donc, s'il est premier, $y=2$ et (1) donne $2^{x-1}=x+1$, ce qui est vrai pour $x=3$. Si x est un nombre premier >3, on a $x \geqslant 5$, d'où $2^{x-1} > x+1$ (ce qu'on démontre sans peine par l'induction). L'équation (1) a donc en nombres premiers x et y seulement la solution $x=3$, $y=2$, c. q. f. d.

Théorème 2. *L'équation* (1) *a une infinité de solutions en nombres composés x et y.*

Démonstration. Les nombres naturels composés n tels que $n \mid 2^n - 2$ sont appelés pseudopremiers. Comme on sait, il existe une infinité de nombres pseudopremiers impairs (ce qui est démontré d'une façon élémentaire dans [1]). Si x est un tel nombre, le nombre $y = \dfrac{2^x-2}{x}$ est évidemment pair >2, puisque $2^{x-1} > x+1$ pour x composés. Les nombres x et y sont donc composés.

Théorème 3. *Il existe une infinité de solutions de l'équation* (1), *où x est un nombre premier et y un nombre naturel composé.*

Démonstration. Soit x un nombre premier >3. D'après le théorème de Fermat, le nombre $y = \dfrac{2^x-2}{x} > 2$ est naturel et pair (vu que x est impair), donc composé.

Théorème 4. *Il n'existe aucune solution de l'équation* (1), *où x est un nombre composé et y un nombre premier.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une solution de l'équation (1), où x est un nombre composé et y un nombre premier. Il résulte de (1) que $y = \dfrac{2^x-2}{2}$ et x étant composé, on a ici $x>3$. Si x était impair, y serait un nombre pair >2, donc composé, contrairement à l'hypothèse. Le nombre x est donc pair, soit $x=2n$, où n est un nombre naturel >1.

Soit δ l'exposant auquel appartient le nombre 2 modulo n. Comme $n>1$, on a $\delta>1$. D'autre part, comme on sait, $\delta\,|\,\varphi(n)$ donc $\delta\leqslant\varphi(n)$. Vu que $n\,|\,2^{2n-1}-1$, on a $\delta\,|\,2n-1$, donc $2n-1=\delta r$, où r est un nombre naturel et, vu que $\delta\leqslant\varphi(n)<n$ (puisque $n>1$) et que $2n-1>n$ (puisque $n>1$), on a $r>1$. Distinguons maintenant deux cas:

1) $n\neq 2^\delta-1$. Alors, vu que $n\,|\,2^\delta-1$, on a

$$n<2^\delta-1. \tag{2}$$

Or, $y=\dfrac{2^{2n-1}-1}{n}=\dfrac{2^{\delta r}-1}{n}=\dfrac{2^{\delta r}-1}{2^\delta-1}\cdot\dfrac{2^\delta-1}{n}$ et, vu que $r>1$ et, vu l'inégalité (2), chacun de deux facteurs de y est >1, donc y est un nombre composé, contrairement à l'hypothèse.

2) $n=2^\delta-1$. Nous prouverons d'abord que $r>\delta$.

En effet, vu que $n=2^\delta-1$, $2n-1=\delta r$, on a $2(2^\delta-1)-1=\delta r$, d'où $r=\dfrac{2^{\delta+1}}{\delta}-3>\delta$ (puisque, comme on le démontre facilement par l'induction, $2^{\delta+1}-3>\delta^2$ pour $\delta>1$).

Or, comme $2^\delta-1\,|\,2^{\delta r}-1$, $2^r-1\,|\,2^{\delta r}-1$, on a

$$\frac{(2^\delta-1)(2^r-1)}{2^{(\delta,r)}-1}=\frac{(2^\delta-1)(2^r-1)}{(2^\delta-1,\,2^r-1)}\,\Big|\,2^{\delta r}-1,$$

d'où

$$(2^\delta-1)(2^r-1)\,|\,(2^{(\delta,r)}-1)(2^{\delta r}-1). \tag{3}$$

D'autre part, on a

$$y=\frac{2^{2n-1}-1}{n}=\frac{2^{\delta r}-1}{2^\delta-1}=\frac{(2^{(\delta,r)}-1)(2^{\delta r}-1)}{(2^\delta-1)(2^r-1)}\cdot\frac{2^r-1}{(2^{(\delta,r)}-1)},$$

où, d'après (3), chacun de deux facteurs pour y est naturel.

Comme $r>\delta$, on a

$$\frac{2^r-1}{(2^{(\delta,r)}-1)}\geqslant\frac{2^r-1}{2^\delta-1}>1.$$

Pareillement, vu que $\delta\geqslant 2$:

$$\frac{2^{\delta r}-1}{(2^\delta-1)(2^r-1)}\geqslant\frac{2^{2r}-1}{(2^\delta-1)(2^r-1)}>\frac{2^{2r}-1}{(2^r-1)(2^r-1)}=\frac{2^r+1}{2^r-1}>1.$$

Les deux facteurs du nombre y sont donc >1 et le nombre y est composé, contrairement à l'hypothèse. Le théorème 4 se trouve ainsi démontré.

De nos quatre théorèmes résulte sans peine ce

C o r o l l a i r e. *Toutes les solutions de l'équation* (1) *en nombres naturels x et y sont celles, où x est un nombre premier ou pseudo-premier quelconque et $y=\dfrac{2^x-2}{x}$. Si $x>3$, y est toujours un nombre composé.*

Or, nous ne savons pas s'il existe des solutions de l'équation (1), où x et y sont des nombres pseudopremiers.

Dans le travail [2] il est démontré (d'une façon élémentaire) qu'il existe une infinité de nombres triangulaires impairs x, tels que $x \mid 2^x - 2$. Il en résulte tout de suite le

Théorème 5. *L'équation* (1) *a une infinité de solutions où x est un nombre triangulaire et y un nombre naturel pair.*

Or, le problème reste ouvert s'il existe une infinité de solutions de l'équation (1), où x est un nombre naturel et y un nombre triangulaire.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Sierpiński, *Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres* $(2^n - 2)/n$, Colloquium Math., Vol. 1 (1947), p. 9.

[2] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers triangulaires*, Elemente der Mathematik (sous presse).