PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 3 (17), 1963, p. 35—40.

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE HOMOGÈNE DU SECOND DEGRÉ

Petar M. Vasić

(Communiqué le 29 mars 1963)

1. Considérons l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{ni} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+i})\, f(x_{n+i+1}, x_{n+i+2}, x_{2n-1+i}, x_{2n+i}) = 0, \tag{1.1}$$

avec $x_k = x_{k-n-1}$ $(k > 2n)$.

Par f est désignée une fonction complexe dépendant de n variables complexes.

La fonction f, donnée par la formule

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} F_1(u_1) & F_1(u_2) & \ldots & F_1(u_n) \\ F_2(u_1) & F_2(u_2) & & F_2(u_n) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ F_n(u_1) & F_n(u_2) & & F_n(u_n) \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ étant des fonctions arbitraires complexes, est une solution de l'équation (1.1). En effet, en développant le déterminant suivant

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \ldots & F_n(x_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & & F_n(x_2) & 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ F_1(x_{n-1}) & F_2(x_{n-1}) & & F_n(x_{n-1}) & 0 & 0 & & 0 \\ F_1(x_n) & F_2(x_n) & & F_n(x_n) & F_1(x_n) & F_2(x_n) & & F_n(x_n) \\ F_1(x_{n+1}) & F_2(x_{n+1}) & & F_n(x_{n+1}) & F_1(x_{n+1}) & F_2(x_{n+1}) & & F_n(x_{n+1}) \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ F_1(x_{2n}) & F_2(x_{2n}) & & F_n(x_{2n}) & F_1(x_{2n}) & F_2(x_{2n}) & & F_n(x_{2n}) \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

d'après la règle de Laplace, on vérifie que (1.2) est une solution de l'équation (1.1), car $\Delta = 0$. Mais, dans le cas général, la fonction (1.2) n'est pas la solution générale de l'équation (1.1). Ainsi, par exemple, si $n=2k+1$, l'équation (1.1) a, comme solution particulière, la fonction suivante

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)=u_1+u_2,$$

qui n'est pas contenue dans (1.2), car pour cette solution on a

$$f(u_1, u_1, u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}, u_n)=2u_1.$$

Cependent, à partir de (1.2) on a

$$f(u_1, u_1, u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}, u_n)=0.$$

Dans le cas où $n=2k$ $(k>1)$, l'équation (1.1) admet comme solution particulière la fonction

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)=u_1-u_2$$

qui n'est pas aussi contenue dans (1.2).

Dans le cas $n=2$, la fonction (1.2) est la solution générale {*voir*: [1]} de l'équation (1.1).

Dans cet article nous allons trouver la solution générale de l'équation (1.1) dans le cas $n=3$.

2. Si $n=3$, l'équation (1.1) a la forme

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_4, x_5, x_6) - f(x_1, x_2, x_4)\, f(x_5, x_6, x_3) \\ + f(x_1, x_2, x_5)\, f(x_6, x_3, x_4) - f(x_1, x_2, x_6)\, f(x_3, x_4, x_5) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Désignons par C_1 la classe de toutes les fonctions f possédant la propriété que $f(u, u, u) \neq 0$ et avec C_2 la classe de toutes les fonctions f telles que $f(u, u, u) \equiv 0$.

Classe C_1. Étant donné que $f(u, u, u) \neq 0$, il existe au moins un nombre complexe α tel que

$$f(\alpha, \alpha, \alpha)=k^3 \neq 0.$$

En posant $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=\alpha$, $x_6=u$, l'équation (2.1) se réduit à

$$f(u, \alpha, \alpha)=f(\alpha, u, \alpha). \tag{2.2}$$

Pour $x_1=x_4=x_5=x_6=\alpha$, $x_2=u$, $x_3=v$, l'équation (2.1) devient

$$f(\alpha, u, v)=k\, F(v)\, H(u), \tag{2.3}$$

où l'on a

$$F(u)=\frac{f(\alpha, \alpha, u)}{k^2}, \qquad H(u)=\frac{f(u, \alpha, \alpha)}{k^2}. \tag{2.4}$$

Si l'on pose $x_2=x_4=x_5=x_6=\alpha$, $x_1=u$, $x_3=v$, d'après (2.2) et (2.4), on obtient

$$f(u, \alpha, v)=k\, F(v)\, H(u). \tag{2.5}$$

En posant $x_1=x_2=x_3=x_4=\alpha$, $x_5=u$, $x_6=v$ et en mettant à profit (2.3), l'équation (2.1) devient

$$f(u, v, \alpha)=k\, \{H(u)\, F(v)-F(u)\, F(v)+F(u)\, H(v)\}. \tag{2.6}$$

Si l'on fait $x_1=x_2=x_3=\alpha$, $x_4=u$, $x_5=v$, $x_6=w$ et met à profit (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6), l'équation (2.1) prend la forme suivante:

$$f(u, v, w)=F(w)\ \{F(u)\ H(v)+F(v)\ H(u)-F(u)\ F(v)\}. \tag{2.7}$$

En posant

$$G(u)=H(u)-\frac{1}{2}F(u),$$

l'identité (2.7) prend la forme simple suivante

$$f(u, v, w)=F(w)\ \{F(u)\ G(v)+F(v)\ G(u)\}. \tag{2.8}$$

La fonction (2.8) est justement la solution de l'équation (2.1).

Classe C_2. Dans ce cas, on a $f(u, u, u)\equiv 0$.

Dans la classe C_2, pour toute solution non triviale de l'équation (2.1) il existe au moins trois nombres complexes a, b, c tels que $f(a, b, c)\neq 0$.

De (2.1), pour $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=x_4=x_5=c$, $x_6=u$, on obtient

$$f(c, c, u)-f(c, u, c)+f(u, c, c)=0. \tag{2.9}$$

Au moyen de la substitution $x_1=x_2=x_4=x_6=c$, $x_3=x_5=u$, l'équation (2.1) se réduit à

$$f(c, u, c)\ f(c, c, u)=0. \tag{2.10}$$

Si l'on pose $x_1=x_2=x_4=x_5=c$ et $x_3=x_6=u$, de (2.1) on obtient

$$f(c, c, u)\ \{f(c, c, u)-f(u, c, c)\}=0. \tag{2.11}$$

Supposons qu'il existe un nombre complexe d tel que $f(c, c, d)\neq 0$. Alors, grâce aux égalités (2.10) et (2.11), on a

$$f(c, d, c)=0,\quad f(c, c, d)=f(d, c, c)$$

et, d'après (2.9), on obtient $f(c, c, d)=0$.

La dernière égalité est au contradiction avec la hypothèse $f(c, c, d)\neq 0$. Donc, on a $f(c, c, u)\equiv 0$ et, d'après (2.9),

$$f(c, u, c)=f(u, c, c). \tag{2.12}$$

Il faut distinguer les deux cas suivants:

$$1^\circ\ f(u, c, c)\not\equiv 0; \qquad 2^\circ\ f(u, c, c)\equiv 0.$$

1° Supposons que l'on ait $f(u, c, c)\not\equiv 0$. Alors, il existe au moins un nombre complexe a' tel que $f(a', c, c)\neq 0$.

Pour $x_1=u$, $x_2=x_5=x_6=c$, $x_3=v$, $x_4=a'$ à partir de (2.1) on obtient

$$f(u, c, v)\ f(a', c, c)+f(u, c, c)\ f(c, v, a')-f(u, c, c)\ f(v, a', c)=0. \tag{2.13}$$

Avec les notations

$$H(u)=\frac{f(u, c, c)}{f(a', c, c)},\qquad F(u)=f(u, a', c)-f(c, u, a'), \tag{2.14}$$

la relation (2.13) prend la forme suivante

$$f(u, c, v)=F(v)\ H(u). \tag{2.15}$$

Si dans (2.1) l'on pose $x_1=x_5=x_6=c$, $x_2=u$, $x_3=v$, $x_4=a'$, il vient

$$f(c, u, v)=F(v)\,H(u),$$

avec les notations (2.14).

(2.13), pour $u=a'$, donne $f(a', c, v)=F(v)$. D'après cela, de (2.1), au moyen des substitutions $x_1=a'$, $x_2=x_3=x_6=c$, $x_4=u$, $x_5=v$, on obtient

$$f(u, v, c)=F(v)\,H(u)+F(u)\,H(v).$$

Enfin, en posant $x_1=a'$, $x_2=x_3=c$, $x_4=u$, $x_5=v$, $x_6=w$ et en introduisant la notation $k=\dfrac{1}{f(a', c, c)}$, à partir de (2.1) on trouve

$$f(u, v, w)=\frac{F(w)}{k}\,\{F(u)\,H(v)+F(v)\,H(u)\},$$

ou bien

$$f(u, v, w)=F(w)\,\{F(u)\,G(v)+F(v)\,G(u)\},$$

avec $G(u)=\dfrac{1}{k}\,H(u)$.

Donc, si des solutions telles que $f(u, u, u)\equiv 0$, $f(u, c, c)\not\equiv 0$ existent elles doivent être de la forme (2.8).

2° Supposons maintenant que $f(u, c, c)\equiv 0$. Alors, d'après (2.9) et (2.12), il vient

(2.16) $$f(c, c, u)=f(c, u, c)=f(u, c, c)=0.$$

En utilisant la relation (2.16), l'équation (2.1) pour $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=u$, $x_4=x_6=c$, $x_5=v$, donne

(2.17) $$f(v, c, u)=-f(u, c, v).$$

En faisant $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=x_4=c$, $x_5=u$, $x_6=v$, l'équation (2.1) donne

(2.18) $$f(c, u, v)=f(u, v, c).$$

Si l'on a $f(a, b, c)\neq 0$, d'après (2.17) et (2.18), on aura $f(a_1, b_1, c_1)\neq 0$, où a_1, b_1, c_1 désigne une permutation quelconque des nombres a, b, c.

Par conséquent, dans les équations (2.17) et (2.18) on peut remplacer c soit par a, soit par b.

D'après l'égalité (2.18), si l'on pose $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $x_4=u$, $x_5=v$, $x_6=w$, l'équation (2.1) devient

$$f(a, b, c)\,f(u, v, w)=f(a, b, u)\,f(c, v, w)-f(a, b, v)\,f(w, c, u)$$
$$+f(a, b, w)\,f(c, u, v).$$

Si l'on y pose $F_1(u)=-\dfrac{f(a, b, u)}{f(a, b, c)}$, on obtient

(2.19) $$f(u, v, w)=-F_1(u)\,f(c, v, w)+F_1(v)\,f(w, c, u)-F_1(w)\,f(c, u, v).$$

Si l'on fait $x_1=c$, $x_2=a$, $x_3=b$, $x_4=u$, $x_5=c$, $x_6=v$, l'équation (2.1) se réduit à

$$f(c, a, b)\, f(u, c, v)=f(c, a, u)\, f(c, v, b)+f(c, a, v)\, f(b, u, c). \tag{2.20}$$

Vu les égalités (2.17) et (2.18), on aura

$$f(b, u, c)=f(c, b, u)=-f(u, b, c)=-f(c, u, b).$$

Si l'on pose

$$F_2(u)=\frac{f(c, a, u)}{f(c, a, b)}, \quad F_3(u)=f(c, u, b), \tag{2.21}$$

l'équation (2.20) se réduit à

$$f(u, c, v)=F_2(u)\, F_3(v)-F_2(v)\, F_3(u). \tag{2.22}$$

En mettant $x_1=x_4=c$, $x_2=a$, $x_3=b$, $x_5=u$, $x_6=v$, l'équation (2.1) conduit à

$$f(c, u, v)=F_2(v)\, F_3(u)-F_2(u)\, F_3(v), \tag{2.23}$$

avec les notations (2.21).

Mettant à profit (2.22) et (2.23), l'égalité (2.19) prend la forme que voici

$$f(u, v, w)=\begin{vmatrix} F_1(u) & F_1(v) & F_1(w) \\ F_2(u) & F_2(v) & F_2(w) \\ F_3(u) & F_3(v) & F_3(w) \end{vmatrix}. \tag{2.24}$$

Donc, la solution (2.24) a la forme (1.3).

D'après tout ce qui précède, étant donné que la classe de toutes les fonctions f est justement $C_1 \cup C_2$, on a le résultat suivant:

Théorème. — *A l'aide des formules* (2.8) *et* (2.24) *sont déterminées toutes les fonctions f, solutions de l'équation* (2.1). *Les fonctions F, G, F_1, F_2, F_3 intervenant dans* (2.8) *et* (2.24) *sont des fonctions quelconques.*

3. Désignons par C_3 la classe de toutes les fonctions f telles que

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ &\quad =-f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ &\qquad (1 \leqslant i<j \leqslant n). \end{aligned} \tag{3.1}$$

D'après (3.1) l'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\ &\quad = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\, f(x_n, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\ &\quad +f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad +f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, f(x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

La solution générale de l'équation (3.2) est {*voir*: [2]} donné par (1.3).

Dans la classe C_3, pour $n=3$, on peut mettre l'équation (1.1) sous la forme suivante

$$f(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_1, x_4) f(x_3, x_5, x_6)$$
$$+ f(x_1, x_2, x_5) f(x_3, x_4, x_6) + f(x_2, x_1, x_6) f(x_3, x_4, x_5) = 0.$$

Dans l'article [3] on a trouvé la solution générale de cette équation.

Cette solution a la forme (2.24). Mais, il est à observer que l'équation (2.1) a des solutions qui ne sont pas les solutions de l'équation (3.3) (la fonction f donnée par la formule (2.8)).

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović et S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur*. Publications de la Facul é d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 70 (1962).

[2] P. M. Vasić: *Équation fonctionnelle d'un certain type de déterminants*. Publications de l'Institut Mathématique de Belgrade, nouvelle série, tome 2 (16), 1962, p. 65—70.

[3] L. Carlitz: *A special funtional équation*. Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 97 (1962).