ÜBER EINIGE TURÁNSCHE FOLGEN

STANIMIR FEMPL (Belgrad)

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird gezeigt dass die Legendreschen elliptischen Normalintegrale I Gattung $F(k, \psi_n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Turánsche Folge bilden, sobald die Amplituden ψ_n den Bedingungen (1) genügen, unter denen das Multiplikationstheorem für solche Integrale gilt. Weiterhin wird ein Satz abgeleitet in dem man zeigt dass die Integrale einer monoton abnehmender stetigen Funktion $f(x)$ in $(0, \psi_n)$ eine Turánsche Folge bilden, sobald die Amplitudenfolge monoton wächst und konvex ist. Auf Grund dieses Satzes zeigt man dass die Folge von Legendreschen elliptischen Normalintegrale II Gattung $E(k, \psi_n)$ unter Bedingungen (1) ebenso Turánscher Art ist.

1. Eine Gesamtheit Φ von Funktionen $\varphi_n(u)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ der reellen Veränderlichen u habe in einem von n unabhängigen Spielraum die Eigenschaft, dass die aus ihnen gebildeten Hankelschen Determinanten

$$D_n(u) = \begin{vmatrix} \varphi_{n-1}(u) & \varphi_n(u) \\ \varphi_n(u) & \varphi_{n+1}(u) \end{vmatrix}, \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

sämtlich negativ sind. Dann heisst Φ eine Turánsche Folge [1].

Es sind zahlreiche Beispiele solcher Folgen bekannt ([2], [3], [4], [5]), und vor kürzerer Zeit hat Koschmieder [1] gezeigt dass die elliptischen Funktionen $\mathrm{sn}(\alpha n u + \beta)$ und $\mathrm{cn}(\alpha n u + \beta)$ (α und β sind igrendwelche festen reellen Werte) ebenfals eine Turánsche Folge längs der ganzen u-Achse bilden, ausgenommen in den Punkten $u_m = 2mK/\alpha$ mit ganzem m (K ist das vollständige elliptische Normalintegral I Gattung).

In dieser Abhandlung zeige ich in 2. dass auch die Inversionen, d. h. die Legendreschen elliptischen Normalintegrale I Gattung $F(k, \psi_n)$, eine Turánsche Folge bilden, sobald die Amplituden ψ_n dieser Integrale den $n-1$ Bedingungen

$$\cos\psi_{\nu+1} = \cos\psi_1 \cos\psi_\nu - \sin\psi_1 \sin\psi_\nu \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi_{\nu+1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1 \quad (1)$$

genügen. In Ahnlehnung an einen Hilfssatz den ich in dieser Arbeit beweise zeige ich dass unter den Bedingungen (1) auch die elliptischen Normalintegrale II Gattung eine Turánsche Folge bilden.

Für $n=1$ unterliegt die Amplitude ψ_1 keiner Bedingung und man kann sie beliebig annehmen. Die übrigen Amplituden berechnet man allmählich aus dem System (1) (das Berechnungsverfahren gab ich in einer früheren Arbeit [6]).

Die Bedingungen (1) sind nicht künstlich aufgestellt, denn unter diesen Bedingungen gilt das Multiplikationstheorem für elliptische Normalintegrale I Gattung ([7], S. 337) $F(k, \psi_n) = n\,F(k, \psi_1)$. Dieselben Bedingungen (1) gelten auch bei einer Formel für elliptische Normalintegrale II Gattung die man, ebenso, Multiplikationsformel benennen könnte. Aus den Summensatz nämlich, für elliptische Normalintegrale II Gattung

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) = E(k, \sigma) + k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma\,,$$

der unter der Bedingung

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma} \tag{2}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}
E(k, \psi_1) + E(k, \psi_1) &= E(k, \psi_2) + k^2 \sin\psi_1 \sin\psi_1 \sin\psi_2\,,\\
E(k, \psi_1) + E(k, \psi_2) &= E(k, \psi_3) + k^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin\psi_3\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
E(k, \psi_1) + E(k, \psi_{n-1}) &= E(k, \psi_n) + k^2 \sin\psi_1 \sin\psi_{n-1} \sin\psi_n\,,
\end{aligned}$$

und anstatt (2) kommt jetzt (1). Nach Addition des obigen Systems erhält man

$$E(k, \psi_n) = n\,E(k, \psi_1) - k^2 \sin\psi_1 \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1}$$

und dieser Ausdruck würde die Multiplikationsformel für elliptische Normalintegrale II Gattung darstellen.

2. Ich beweise folgende Sätze.

SATZ I. *Genügen die Amplituden ψ_ν den Bedingungen* (1), *so bilden die Legendreschen elliptischen Normalintegrale I Gattung eine Turánsche Folge.*

Beweis. Auf Grund von (1) ist

$$F(k, \psi_m) = m\,F(k, \psi_1),\quad m = n-1,\ n,\ n+1;\quad n = 2, 3, \ldots$$

Darum ist

$$\begin{vmatrix} F(k,\psi_{n-1}) & F(k,\psi_n) \\ F(k,\psi_n) & F(k,\psi_{n-1}) \end{vmatrix} = F^2(k,\psi_1) \begin{vmatrix} n-1 & n \\ n & n+1 \end{vmatrix} < 0,$$

was zu beweisen war.

HILFSSATZ. *Es sei $f(x)$ eine positive monoton abfallende stetige Funktion. Die Integrale*

$$\varphi_n = \varphi(\psi_n) = \int_0^{\psi_n} f(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

bilden immer eine Turánsche Folge, sobald die Folge $\{\psi_n\}$ monoton wächst und konvex ist.

Beweis. Aus

$$\varphi_{m+1} = \varphi_m + \int_{\psi_m}^{\psi_{m+1}} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \varphi_{m-1} = \varphi_m - \int_{\psi_{m-1}}^{\psi_m} f(x)\,dx$$

folgt

$$\varphi_{m+1}\varphi_{m-1} - \varphi_m^2 = \varphi_m \left(\int_{\psi_m}^{\psi_{m+1}} f(x)\,dx - \int_{\psi_{m-1}}^{\psi_m} f(x)\,dx \right) - \int_{\psi_{m-1}}^{\psi_m} f(x)\,dx \cdot \int_{\psi_m}^{\psi_{m+1}} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Wegen der Konvexität von $\{\psi_m\}$ ist $\psi_{m+1} - \psi_m < \psi_m - \psi_{m-1}$ $(m = 2, 3, \ldots)$, und wegen

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi), \qquad a < \xi < b,$$

kann man dem ersten Glied der rechten Seite in (3) die Form

$$\begin{gathered} (\psi_{m+1} - \psi_m)\,f(\xi_1) - (\psi_m - \psi_{m-1})\,f(\xi_2) \\ (\psi_m < \xi_1 < \psi_{m+1}, \quad \psi_{m-1} < \xi_2 < \psi_m) \end{gathered} \tag{4}$$

geben. Wegen $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ und wegen (4) ist das erwähnte Glied in (3) negativ. Da noch $\varphi(\psi) > 0$, so hat die rechte Seite von (3) einen negativen Wert, und es ist $\varphi_{m+1}\varphi_{m-1} - \varphi_m^2 < 0$, was zu beweisen war.

SATZ II. *Sobald die Amplituden* ψ_ν, $(0 \leqslant \psi_\nu \leqslant \pi/2$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *den Bedingungen* (1) *genügen, so bilden die Legendreschen elliptischen Normalintegrale* II *Gattung eine Turánsche Folge.*

(Hier sind die Amplituden ψ_ν auf das Intervall $(0, \pi/2)$ beschränkt, da im allgemeinen Falle die elliptischen Integrale II Gattung keine Turánsche Folge bilden müssen. Unter solcher Beschränkung folgt aus (1)

$$\psi_\nu < \psi_{\nu+1} < \psi_1 + \psi_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \text{und} \quad \psi_1 > \psi_{\nu+1} - \psi_\nu > 0,$$

d. h. die Amplituden ψ_ν bilden eine monoton wachsende Folge aus positiven Elementen.)

B e w e i s des Satzes. Die Bedingungen (1) sind den Bedingungen

$$\operatorname{tg} \frac{\psi_{\nu+1} + \psi_{\nu-1}}{2} = \operatorname{tg} \psi_\nu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1}, \quad (\psi_0 = 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5}$$

equivalent, denn aus (1) folgt nach Rationalisierung und Addierung der Grösse $\sin^2 \psi_1 \sin^2 \psi_\nu$ nach kürzerer Rechnung

$$\cos \psi_1 - \cos \psi_\nu \cos \psi_{\nu+1} = \sin \psi_\nu \sin \psi_{\nu+1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1}, \tag{6}$$

und man bedarf für die Richtigkeit des Vorzeichens einen Nachweis. Nun geht die Gleichung (1) für $k = 0$, in $\psi_{\nu+1} = \psi_1 + \psi_\nu$; dasselbe gibt auch die Gleichung (6). Jetzt folgen aus

$$\cos \psi_{\nu+1} = \cos \psi_1 \cos \psi_\nu - \sin \psi_1 \sin \psi_\nu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_{\nu+1}},$$

$$\cos \psi_\nu = \cos \psi_1 \cos \psi_{\nu-1} - \sin \psi_1 \sin \psi_{\nu-1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_\nu},$$

die Gleichungen

$$\cos \psi_1 = \cos \psi_{\nu+1} \cos \psi_\nu + \sin \psi_{\nu+1} \sin \psi_\nu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1},$$

$$\cos \psi_1 = \cos \psi_\nu \cos \psi_{\nu-1} + \sin \psi_\nu \sin \psi_{\nu-1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_1}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke, so bekommt man (5), und wegen $0 \leqslant k \leqslant 1$,

$$\operatorname{tg} \frac{\psi_{\nu+1} + \psi_{\nu-1}}{2} < \operatorname{tg} \psi_\nu, \quad \text{d. h.} \quad \psi_{\nu+1} - \psi_\nu < \psi_\nu - \psi_{\nu-1},$$

und die Amplituden ψ bilden eine monoton wachsende konvexe Folge aus positiven Elementen. Da noch der Integrand in dem elliptischen Normalintegral II Gattung

$$E(k,\psi)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

positiv ist und monoton abnimmt, so sind alle Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt. Somit ist der Satz III bewiesen.

3. Von Interesse sind noch die Grenzfälle $k=0$ und $k=1$. Für $k=0$ haben die Integrale $E(k,\psi)$ und $F(k,\psi)$ denselben Wert ψ, und man ersieht dass auch die Amplitudenfolge $\{\psi_n\}$ eine Turánsche ist, wenn nur

$$\psi_\nu=\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2},$$

d. h. aritmetische Folgen sind Turánscher Art.

Für $k=1$ reduziert sich $E(k,\psi)$ auf $\sin\psi$ und man ersieht dass die Folge $\{\sin\psi_n\}$ Turánscher Art ist, wenn nur

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu+1}}{2}=\operatorname{tg}\psi_\nu\cos\psi_1\quad(\nu=1,2,\ldots,n-1,\ \psi_0=0). \tag{7}$$

Wenn man diesem Resultat das Resultat von Koschmieder für die Funktion $\operatorname{sn}(\alpha n\psi+\beta)$ für $k=0$ d. h. $\sin(\alpha n\psi+\beta)$ danebenstellt, so ersieht man dass in der Determinante

$$\begin{vmatrix}\sin[\alpha(n-1)\psi+\beta] & \sin(\alpha n\psi+\beta)\\ \sin(\alpha n\psi+\beta) & \sin[\alpha(n+1)\psi+\beta]\end{vmatrix}$$

die Argumenten von Sinus eine aritmetische Folge bilden. In unserem Falle gehören diese Argumente einer ganz anderen Folge.

Erwähnen wir noch dass sich für $k=1$ die Integrale $F(k,\varphi)$ auf $\log\operatorname{tg}(\pi/4+\varphi/2)$ reduzieren, und zwar unter denselben Bedingungen (6) für die Argumente φ.

LITERATUR

[1] Koschmieder, L. — Elliptische Funktionen als Turánsche Folgen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **60** (1957), 3—6.

[2] Turán, P. — On the zeros of the polynomials of Legendre. *Časopis propěstování matematiky a fysiky* **75** (1950), 113—122.

[3] Eweida, M. T. — On Turáns determinant.... *Revista mat. Hisp.-Amer.* **15** (1955), 79—87.

[4] Beckenbach, E. F., Seidel, W. and Szász, O. — Recurrent determinants of Legendre and of ultraspherical polynomials. *Duke Math. Journal* **18** (1951), 1—10.

[5] Al-Salam, W. — On a generalized Hermite polynomial. *Bolletino Unione mat. italiana* **IV** (1957), 241—246.

[6] Fempl, S. — O jednoj linearnoj kombinaciji normalnih eliptičkih integrala I i II vrste. *Zbornik radova Mat. inst. SAN.* **5** (1956), 61—116.

[7] Schlömilch, O. — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.