Sur une propriété des constituantes des ensembles analytiques.

Par

WACLAW SIERPINSKI.

Le but de cette Note est de démontrer le

Théorème: *Si un ensemble analytique linéaire E est décomposé en $\aleph_1$ constituantes (mesurables B) disjointes*

$$E = \sum_{\alpha<\Omega} Q^{\alpha} \quad [1] \tag{1}$$

et si l'on prend un point dans chaque constituante non vide, l'ensemble de points N ainsi obtenu jouit de la propriété suivante: Tout ensemble linéaire homéomorphe de N est de mesure nulle.

En 1925 j'ai démontré un théorème analogue concernant les constituantes des complémentaires analytiques [2]; cette démonstration n'est pas cependant valable pour les constituantes des ensembles analytiques eux mêmes et c'est seulement en utilisant une idée de M. Sélivanowski [3]) que j'ai réussi à démontrer le théorème faisant objet de la présente Note.

Démonstration.

En utilisant les notations de ma Note citée [4]), on a les formules:

$$\sum_{\xi \leq \alpha} Q^{\xi} = S^{\alpha} - T^{\alpha}, \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega, \tag{2}$$

---

[1]) Pour la terminologie et les notations voir ma Note des *Fundamenta Mathematicae* t. XXI, p. 29 ss., en particulier p. 32, formule (13).

[2]) *Fundamenta Mathematicae* t. VII, p. 188—190.

[3]) *Fund. Math.* t. XXI, p. 24; cf. aussi ibid., p. 30.

[4]) *Fund. Math.* t. XXI, p. 33 formule (14) et p. 30 formules (5), (6), (8) et (4).

(3) $$E \subset S^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^\alpha, \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega,$$

(4) $$T^\alpha = \sum_{(n_1, n_2, \ldots n_k)} (\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots n_k}), \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega,$$

où $\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (pour les nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$) sont des ensembles mesurables B, tels que (pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$)

(5) $$\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset \delta^\beta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad \text{pour} \quad \alpha \geq \beta.$$

Soit maintenant N^* un ensemble linéaire homéomorphe de l'ensemble N. D'après le théorème de M. Lavrentieff [1]) l'homéomorphie entre N et N^* peut être étendue à des ensembles M et M^* qui sont des G_δ, tels que $M \supset N$ et $M^* \supset N^*$. Z étant un sous-ensemble de M, désignons généralement par $\varphi(Z)$ l'ensemble correspondant à Z dans l'homéomorphie entre M et M^*. On a donc $\varphi(M) = M^*$ et $\varphi(N) = N^*$.

D'après (4) on trouve (pour $\alpha < \Omega$):

(6) $$\varphi(MT) = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} \varphi(M(\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\alpha+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k})).$$

Les ensembles $\varphi(M\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$, en tant que homéomorphes d'ensembles mesurables B, sont mesurables B [2]): d'après (5) on a donc pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\text{mes}\, \varphi(M\delta^\alpha_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) \leq \text{mes}\, \varphi(M\delta^\beta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) \quad \text{pour} \quad \alpha \geq \beta,$$

d'où résulte qu'il existe un nombre ordinal $\lambda = \lambda(n_1, n_2, \ldots, n_k) < \Omega$, dépendant du système $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tel que

$$\text{mes}\, \varphi(M\delta^\xi_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = \text{mes}\, \varphi(M\delta^\lambda_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) \quad \text{pour} \quad \xi \geq \lambda.$$

L'ensemble des systèmes finis d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant dénombrable, il en résulte tout de suite qu'il existe

[1]) *C. R. Paris* t. 178, p. 187 (note du 7 janvier 1924); *Fund. Math.* t. VI, p. 149.

[2]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. VI, p. 152.

un nombre ordinal $\mu < \Omega$ ne dépendant pas du système n_1, $n_2, \ldots, n_k$ et tel que, pour $\xi \geq \mu$

$$\text{mes } \varphi(M\delta^{\xi}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = \text{mes } \varphi(M\delta^{\mu}_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$$

quel que soit le système fini d'indices naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Cela donne (pour $\xi = \mu + 1$), d'après (5):

$$\text{mes } [\varphi(M\delta^{\mu}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) - \varphi(M\delta^{\mu+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k})] = 0\,,$$

d'où, φ étant une transformation biunivoque de l'ensemble M:

$$\text{mes } \varphi[M(\delta^{\mu}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \delta^{\mu+1}_{n_1, n_2, \ldots, n_k})] = 0$$

quel que soit le système d'indices $n_1, n, \ldots, n_k$, et il en résulte tout de suite, d'après (6), la formule

$$\text{mes } \varphi(MT^{\mu}) = 0$$

et, d'après $N \subset M$, on a, à plus forte raison, la formule

$$\text{mes } \varphi(NS^{\mu}T^{\mu}) = 0\,. \tag{7}$$

Or, de (3) résulte que $N = NE \subset NS^{\mu}$, d'où $\varphi(N) \subset \varphi(NS^{\mu})$, ce qui donne

$$\text{mes}_e\, \varphi(N) \leq \text{mes}_e\, \varphi(NS^{\mu}) \tag{8}$$

($\text{mes}_e\, Z$ désignant la mesure extérieure lebesguienne de l'ensemble Z).

Or, on a évidemment $NS^{\mu} = N(S^{\mu} - T^{\mu}) + NS^{\mu}T^{\mu}$, d'où:

$$\varphi(NS^{\mu}) = \varphi(N(S^{\mu} - T^{\mu})) + \varphi(NS^{\mu}T^{\mu})$$

ce qui donne, d'après (7):

$$\text{mes}_e\, \varphi(NS^{\mu}) \leq \text{mes}_e\, (N(S^{\mu} - T^{\mu}))\,. \tag{9}$$

Les formules (8) et (9) donnent, d'après (2):

$$\text{mes}_e\, \varphi(N) \leq \text{mes}_e\, \varphi(N \sum_{\xi < \mu} Q^{\xi})\,. \tag{10}$$

Or, de la définition de l'ensemble N résulte que l'ensemble $N \sum_{\xi<\mu} Q^{\xi}$ est au plus dénombrable: on a donc $\text{mes}_e\, \varphi(N \sum_{\xi<\mu} Q^{\xi}) = 0$ et, d'après (10)

$$\text{mes}_e\, \varphi(N) = 0\,,$$

donc mes $N^*=0$, c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré.

Il est à remarquer que l'ensemble N jouit encore de la propriété remarquable suivante: il est de 1-ière categorie de Baire sur tout ensemble parfait [1]).

Il est encore à remarquer qu'en utilisant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) on peut démontrer qu'il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toute image continue est de mesure nulle [2]).

---

[1]) Voir *Fund. Math.* t. XXI, p. 35.
[2]) Voir *Fund. Math.* t. XI, p. 302.