MEILLEURE APPROXIMATION ET CLASSES DE SATURATION DU PROCÉDÉ DE HÖLDER DANS LES ESPACES C ET L^p [1)]

S. ALJANČIĆ (Belgrade)

SOMMAIRE — On donne la meilleure approximation et la classe de saturation du procédé de Hölder itéré appliqué à la série de Fourier d'une fonction appartenant à l'espace C ou à L^p, $p \geqslant 1$.

INTRODUCTION ET RÉSULTATS

1. Soit E un espace de Banach séparable, réel ou complexe. Soit $\{x^\nu\}$ une suite fermée d'éléments, $\{l_\nu(x)\}$ une suite totale de fonctionnelles linéaires, ces deux suites étant biorthonormées. Alors, à tout $x \in E$ correspond un développement en série biorthogonale

$$x \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu(x)\, x^\nu.$$

Soit Γ un procédé de sommation triangulaire, appliqué à la série $A = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, défini par

$$\Gamma_n(A) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{\nu,n}\, a_\nu.$$

Soit $\varphi(n)$ une fonction positive, décroissante et telle que $\varphi(n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Récemment J. Favard [3] a montré que si le procédé Γ satisfait à la condition

$$0 < K_\nu\, \varphi(n) < |1 - \gamma_{\nu,n}| < L_\nu\, \varphi(n), \tag{1.1}$$

---

1) Une partie des résultats contenus dans cet article se trouve (sans démonstrations) déjà dans une note publiée dans les *Comptes rendus Paris*, t. **246** (1958), p. 2567—9.

alors

(i) $r_n = \left\| x - \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{\nu,n}\, l_\nu(x)\, x^\nu \right\| = o\,[\varphi(n)]$ n'a lieu que lorsque x est l'élément neutre de E;

(ii) il existe une variété linéaire $\Sigma \subset E$, non vide, telle que

$$x \in \Sigma \quad \Longleftrightarrow \quad r_n = O\,[\varphi(n)].$$

On donne à $\varphi(n)$ et Σ le nom de la *meilleure approximation* respectivement *classe de saturation* du procédé Γ.

En particulier, dans le cas du procédé de Cesàro $C^{(k)}$, k entier, appliqué aux séries de Fourier ordinaires dans l'espace des fonctions continues C, l'ordre de la meilleure approximation est $1/n$ et la classe de saturation est celle des fonctions $x \in C$ telles que la conjuguée $\bar{x} \in \mathrm{Lip}\,1$. On a des résultats analogues lorsqu'on se place dans l'espace L ou dans l'espace L^p, $p > 1$ (G. Alexits [1, 2], M. Zamansky [4, 5], J. Favard [3]).

2. Dans cette note nous allons établir des résultats semblables pour le procédé de Hölder $H^{(k)}$. Les procédés $C^{(k)}$ et $H^{(k)}$ étant équivalents au point de vue de la sommation, il y a intérêt à les comparer au point de vue de l'approximation.

THÉORÈME. *La meilleure approximation fournie par le procédé de Hölder $H^{(k)}$ est d'ordre $(\log n)^{k-1}/n$ et la classe de saturation de $H^{(k)}$ est*

1° *dans l'espace C celle des fonctions $x(t)$ telles que la conjuguée $\bar{x}(t) \in \mathrm{Lip}\,1$;*

2° *dans l'espace L celle des fonctions $x(t)$ telles que la conjuguée $\bar{x}(t)$ soit à variation bornée;*

3° *dans l'espace L^p, $p > 1$, celle des fonctions $x(t)$ telles que la conjuguée $\bar{x}(t)$ soit équivalente à une fonction absolument continue admettant p.p. une dérivée $\bar{x}'(t) \in L^p$.*

On trouve donc les mêmes classes de saturation (quelque soit l'espace envisagé) que dans le cas du procédé de Cesàro $C^{(k)}$, mais avec un ordre d'approximation différent. En comparant entre eux les procédés $C^{(k)}$ et $H^{(k)}$ pour k fixe et les procédés $H^{(k)}$ pour différentes valeurs de k, on voit, d'une part, que les procédés, équivalents au point de vue de la sommation, ne le sont pas au point de vue de l'approximation et, d'autre part, qu'un procédé plus puissant dans un sens est effectivement plus faible dans l'autre.

Le théorème repose sur deux résultats: un portant sur les séries numériques (ou appartenant à un espace de Banach) (lemme 1) et l'autre faisant partie de la théorie des séries de Fourier (lemme 2). Dans ces deux lemmes figure un procédé de sommation particulier

$$\mathfrak{H}_n^{(k)}(A)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\chi_{\nu,n}^{(k)}a_\nu,$$

où

$$\frac{\log^{k-1}n}{(k-1)!}\chi_{\nu,n}^{(k)}=\frac{n+1}{n}\{\pi_{\nu,n}^{(k-1)}-\cdots+(-1)^k\pi_{\nu,n}^{(1)}\}+(-1)^{k+1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right) \tag{2.1}$$

avec

$$\pi_{\nu,n}^{(m)}=\sum_{i_m=\nu+1}^{n}\frac{1}{i_m}\sum_{i_{m-1}=\nu+1}^{i_m}\frac{1}{i_{m-1}}\cdots\sum_{i_2=\nu+1}^{i_3}\frac{1}{i_2}\sum_{i_1=\nu+1}^{i_2}\frac{1}{i_1}. \tag{2.2}$$

LEMME 1. *Pour que la série* $A=\Sigma a_\nu$ *soit sommable-*$H^{(k)}$ *vers la somme généralisée* s *et pour que*

$$H_n^{(k)}(A)-s=O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right),\qquad -1<\alpha<+1, \tag{2.3}$$

il est nécessaire et suffisant que

$$\mathfrak{H}_n^{(k)}(B)=O\left[\frac{(\log n)^{\beta-k+1}}{n^\alpha}\right], \tag{2.4}$$

où B *désigne la série* $\Sigma\nu a_\nu$.

LEMME 2. *Soit* T *la série trigonométrique*

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t).$$

La condition

$$\|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)\|_{C,L^p}=O(1) \tag{2.5}$$

est nécessaire et suffisante pour que T *soit*

1° *la série de Fourier d'une fonction bornée p.p., lorsqu'on se place dans l'espace* C;

2° *la dérivée formelle de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée lorsqu'on se place dans l'espace L;*

3° *la série de Fourier d'une fonction appartenant à L^p, $p>1$, lorsqu'on se place dans l'espace L^p.*

Quant au procédé $\mathfrak{H}^{(k)}$, nous remarquons qu'il est une combinaison du procédé $C^{(1)}$ et des moyennes logarithmiques itérées $L_n^{(k)}(A)$ qui sont definies par

$$L_n^{(k)}(A)=\frac{k}{\log^k n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\log^{k-1}\nu}{\nu}L_\nu^{(k-1)}(A),\qquad L_n^{(0)}(A)=\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu. \tag{2.6}$$

En effet, il est facile à voir que

$$L_n^{(k)}(A)=\frac{k!}{\log^k n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\pi_{\nu,n}^{(k)}a_\nu,$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_n^{(k)}(A)=\frac{n+1}{n}\Big\{L_n^{(k-1)}(A)-\frac{k-1}{\log n}L_n^{(k-2)}(A)+\ldots+(-1)^k\frac{(k-1)\ldots 3.2}{\log^{k-2}n}L_n^{(1)}(A)\Big\}\\ +(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{\log^{k-1}n}C_n^{(1)}(A).\end{aligned} \tag{2.7}$$

On peut démontrer le lemme 1 directement, mais par un calcul un peu fatiguant. Aussi nous préférons baser sa démonstration sur le résultat analogue pour le procédé de Cesàro, à savoir:

LEMME 3. *Pour que la série $A=\Sigma a_\nu$ soit sommable-$C^{(k)}$ vers la somme généralisée s et pour que*

$$C_n^{(k)}(A)-s=O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right),\qquad -1<\alpha<k, \tag{2.8}$$

il est nécessaire et suffisant que

$$C_n^{(k)}(B)=O\left(\frac{\log^\beta n}{n^\alpha}\right), \tag{2.9}$$

où B désigne la série $\Sigma\nu a_\nu$.

Ce résultat, avec $\alpha=0$ et $\beta=0$, se trouve déjà chez G. Alexits ([2], lemmes 1 et 2) pour $k=1$ et pour k entier chez J. Favard ([3], théorèmes 1 et 2). Pour nous, seul le cas $\beta\neq 0$ est intéressant; aussi nous allons démontrer le lemme 3 au § 3, en donnant une démonstration nouvelle et simple.

Nous remarquons que dans le lemme 3, contrairement au lemme 1, figure le même procédé de sommation dans les deux énoncés. Aussi il y a interêt à juxtaposer l'expression explicite du procédé de Hölder, à savoir

$$H_n^{(k)}(A)=\sum_{\nu=0}^{n-1} h_{\nu,n}^{(k)}\, a_\nu ,$$

où

$$h_{\nu,n}^{(k)}=1-\frac{\nu}{n}-\frac{\nu}{n}\{\pi_{\nu,n}^{(1)}+\cdots+\pi_{\nu,n}^{(k-1)}\}, \tag{2.10}$$

à celle du procédé $\mathfrak{H}^{(k)}$.

DÉMONSTRATIONS

3. Démonstration du lemme 3. Nous commençons par établir les deux identités suivantes:

$$(n+k)\,[C_n^{(k)}(A)-C_n^{(k+1)}(A)]=C_n^{(k)}(B), \tag{3.1}$$

$$C_n^{(k+1)}(A)-C_{n-1}^{(k+1)}(A)=\frac{k+1}{(n-1)\,(n+k)}\,C_n^{(k)}(B). \tag{3.2}$$

En effet, étant donné que

$$C_n^{(k)}(A)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu}{n+k-1}\right)a_\nu ,$$

on a, d'une part,

$$(n+k)\,[C_n^{(k)}(A)-C_n^{(k+1)}(A)]=$$

$$=(n+k)\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu}{n+k-1}\right)\left[1-\left(1-\frac{\nu}{n+k}\right)\right]a_\nu=C_n^{(k)}(B),$$

et, d'autre part,

$$C_n^{(k+1)}(A)-C_{n-1}^{(k+1)}(A)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu}{n+k-1}\right)\left[\left(1-\frac{\nu}{n+k}\right)-\left(1-\frac{\nu}{n-1}\right)\right]a_\nu=$$

$$=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+k}\right)C_n^{(k)}(B).$$

Pour démontrer que (2.8) $\Longrightarrow$ (2.9), nous remarquons d'abord que pour $\alpha < k+1$,

$$(2.8) \Longrightarrow C_n^{(k+1)}(A) - s = O\left(\frac{\log^{\beta} n}{n^{\alpha+1}}\right).$$

En effet,

$$C_n^{(k+1)}(A) - s = \frac{1}{\binom{n+k}{k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{\nu+k-1}{k} C_{\nu}^{(k)}(A) - s$$

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{\nu+k-1}{k} [C_{\nu}^{(k)}(A) - s]$$

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{k+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{\nu+k-1}{k} O\left(\frac{\log^{\beta}\nu}{\nu^{\alpha+1}}\right)$$

$$= O\left(\frac{\log^{\alpha} n}{n^{\alpha+1}}\right).$$

L'affirmation (2.9) résulte alors de l'identité (3.1).

Inversement, (2.9) $\Longrightarrow$ (2.8). Les identités (3.2) et (2.9) donnent

$$C_n^{(k+1)}(A) - C_{n-1}^{(k+1)}(A) = O\left(\frac{\log^{\beta} n}{n^{\alpha+2}}\right).$$

Donc, de

$$|C_m^{(k+1)}(A) - C_n^{(k+1)}(A)| \leqslant \sum_{\nu=n}^{m-1} |C_{\nu+1}^{(k+1)}(A) - C_{\nu}^{(k+1)}(A)|$$

$$\leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} O\left(\frac{\log^{\beta}\nu}{\nu^{\alpha+2}}\right)$$

$$\leqslant O\left(\frac{\log^{\beta} n}{n^{\alpha+1}}\right), \quad \alpha > -1,$$

résulte d'abord la convergence de la suite $C_n^{(k+1)}(A)$, soit vers s, et ensuite, en y faisant $m \to \infty$:

$$C_n^{(k+1)}(A) - s = O\left(\frac{\log^{\beta} n}{n^{\alpha+1}}\right).$$

L'affirmation (2.8) résulte alors de l'identité (3.1).

4. Démonstration du lemme 1. Pour $k=1$ le lemme 1 se réduit à

$$H_n^{(1)}(A) - s = O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right) \Longleftrightarrow \mathfrak{H}_n^{(\ )}(B) = O\left(\frac{\log^\beta n}{n^\alpha}\right), \tag{4.1}$$

c. à. d. au lemme 3 avec $k=1$, car $H^{(1)} = \mathfrak{H}^{(1)} = C^{(1)}$.

Démontrons que le lemme 1 est vrai pour $k=2$. Si l'on fait la substitution

$$a_n \ \Big| \ \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\mu=1}^{n} \mu\, a_\mu, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.2}$$

dans les deux énoncés (4.1), on obtient, d'une part, au lieu de

$$H_n^{(1)}(A) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\nu}{n}\right) a_\nu,$$

l'expression (voir (2.2) et (2.10))

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{\nu(\nu+1)}\sum_{\mu=1}^{\nu} \mu\, a_\mu = a_0 + \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu\, a_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n-1}\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{\nu(\nu+1)}$$

$$= a_0 + \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu\, a_\mu \left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{1}{\nu}\right\}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n-1}\left\{1 - \frac{\mu}{n} - \frac{\mu}{n}\,\pi_{\mu,n}^{(1)}\right\} a_\mu = H_n^{(2)}(A)$$

et, par conséquent, le premier énoncé dans (4.1) devient

$$H_n^{(2)}(A) - s = O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right).$$

D'autre part, en faisant la même substitution dans

$$\mathfrak{H}_n^{(1)}(B) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\nu\, a_\nu,$$

on obtient avec la notation (2.2)

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\, a_\mu=\sum_{\mu=1}^{n-1}\mu a_\mu\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{\nu+1}$$

$$=\sum_{\mu=1}^{n-1}\mu\, a_\mu\left\{\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{n}\sum_{\nu=\mu}^{n-1}1+\frac{1}{n}\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\frac{1}{\nu+1}\right\}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-1}\left\{\frac{n+1}{n}\pi_{\mu,n}^{(1)}-\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\right\}\mu\, a_\mu .$$

Par conséquent, le deuxième énoncé dans (4.1) devient, d'après (2.1),

$$\log n\sum_{\mu=0}^{n-1}\chi_{\nu,n}^{(2)}\mu\, a_\mu=O\left(\frac{\log^\beta n}{n^\alpha}\right),$$

c. à. d.

$$\mathfrak{H}_n^{(2)}(B)=O\left(\frac{\log^{\beta-1}n}{n^\alpha}\right).$$

Donc, l'affirmation du lemme 1 est vrai pour $k=2$.

Supposons que le lemme est vrai pour un $k\geqslant 2$. La substitution (4.2) transforme $H_n^{(k)}(A)$ en $H_n^{(k+1)}(A)$, donc l'énoncé (2.3) en

$$H_n^{(k+1)}(A)-s=O\left(\frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}}\right).$$

La même substitution, en tenant compte de

$$\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\frac{1}{\nu+1}\pi_{\nu,n}^{(m)}=\pi_{\mu,n}^{(m+1)},$$

transforme $\mathfrak{H}_n^{(k)}(B)$ en

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\chi_{\nu,n}^{(k)}\frac{1}{\nu+1}\sum_{\mu=0}^{n}\mu\, a_\mu=\sum_{\mu=0}^{n-1}\mu\, a_\mu\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\chi_{\nu,n}^{(k)}\frac{1}{\nu+1}=$$

$$=\frac{(k-1)!}{\log^{k-1}n}\sum_{\mu=0}^{n-1}\mu\, a_\mu\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\frac{1}{\nu+1}\left\{\frac{n+1}{n}(\pi_{\nu,n}^{(k)}-\cdots+(-1)^k\pi_{\nu,n}^{(1)})+(-1)^{k+1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{(k-1)!}{\log^{k-1} n}\sum_{\mu=0}^{n-1}\mu a_\mu\left\{\frac{n+1}{n}[\pi_{\nu,n}^{(k)}-\cdots+(-1)^k\pi_{\nu,n}^{(2)}]+(-1)^{k+1}\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{\nu+1}\right\}$$

$$=\frac{(k-1)!}{\log^{k-1} n}\sum_{\mu=0}^{n-1}\mu a_\mu\left\{\frac{n+1}{n}[\pi_{\nu,n}^{(k)}-\cdots+(-1)^{k+1}\pi_{\nu,n}^{(1)}]+(-1)^{k+2}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{\log n}{k}\sum_{\mu=0}^{n-1}\chi_{\mu,n}^{(k+1)}\mu a_\mu .$$

Donc, l'énoncé (2.4) devient

$$\frac{\log n}{k}\,\mathfrak{H}_n^{(k+1)}(B)=O\left[\frac{(\log n)^{\beta-k+1}}{n^\alpha}\right],$$

ce qui donne

$$\mathfrak{H}_n^{(k+1)}(B)=O\left(\frac{\log^{\beta-k} n}{n^\alpha}\right),$$

C. Q. F. D.

5. Démonstration du lemme 2. Une moitié de lemme 2 (nécessité) repose sur la quasi-positivité du noyau

$$K_n^{(k)}(t)=\frac{1}{2}\chi_{0,n}^{(k)}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\chi_{\nu,n}^{(k)}\cos\nu t$$

correspondant au procéde $\mathfrak{H}^{(k)}$, c. à. d. sur le fait que

$$\int_0^{2\pi}|K_n^{(k)}(t)|\,dt=O(1)$$

(voir [6], § 4, p. 87).

Or, pour tout procédé Γ, le noyau correspondant $K_n^\Gamma(t)$ est donné par

$$K_n^\Gamma(t)=\Gamma_n(S),$$

où S désigne la série $1/2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu t$. Donc, d'après (2.7),

$$K_n^{(k)}(t)=\mathfrak{H}_n^{(k)}(S)=$$

$$=\frac{n+1}{n}\left\{L_n^{(k-1)}(S)-\frac{k-1}{\log n}L_n^{(k-2)}(S)+\cdots+(-1)^k\frac{(k-1)\ldots 3.2.}{\log^{k-2} n}L_n^{(1)}(S)\right\}+$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{\log^{k-1} n}C_n^{(1)}(S),$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\,(k-1)!\left\{\int_0^{2\pi} |L_n^{(k-1)}(S)|\, dt + \cdots + \int_0^{2\pi} |L_n^{(1)}(S)|\, dt + \int_0^{2\pi} |C_n^{(1)}(S)|\, dt\right\}.$$

On voit, donc, que la quasi-positivité du noyau $K_n^{(k}(t)$ résulte de la quasi-positivité des noyaux correspondants aux procédés $C^{(1)}$ et $L^{(k)}$. Pour $C^{(1)}$ c'est bien connu. Pour $L^{(1)}$ on a

$$L_n^{(1)}(A) = \frac{C_n^{(1)}(A)}{\log n} + \frac{1}{\log n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_{\nu-1}^{(1)}(A)}{\nu}, \tag{5.1}$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} |L_n^{(1)}(S)|\, dt \leqslant \frac{1}{\log n}\int_0^{2\pi} |C_n^{(1)}(S)|\, dt + \frac{1}{\log n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\int_0^{2\pi} |C_{\nu-1}^{(1)}(S)|\, dt = O(1)$$

et pour $L^{(k)}$, $k=2, 3\ldots$ il n'y a qu'à remonter à la définition (2.6) du procédé $L^{(k)}$, d'où

$$\int_0^{2\pi} |L_n^{(k)}(S)|\, dt \leqslant \frac{k}{\log^k n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\log^{k-1}\nu}{\nu}\int_0^{2\pi} |L_\nu^{(k-1)}(S)|\, dt = O(1),$$

et de raisonner par induction.

Nous remarquons encore que si T est la série de Fourier de $x(t)$, alors

$$\mathfrak{H}_n^{(k)}(T) \to x(t) \text{ p. p.} \tag{5.2}$$

En effet, cela est vrai pour $C^{(1)}$ ([6], § 3, p. 49) et d'après (5.1) et (2.6) pour $L^{(k)}$; donc, en tenant compte de (2.7), pour $\mathfrak{H}^{(k)}$ aussi.

1° *L'espace C.* La conditions (2.5) est nécessaire. En effet, si T est la série de Fourier d'une fonction $x(t)$ bornée p. p., on a

$$\mathfrak{H}_n^{(k)}(T) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n^{(k)}(t-u)\, x(u)\, du;$$

$\| \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) \|_C = O(1)$ résulte alors de la quasi-positivité du noyau $K^{(k)}(t)$ et du fait que $|x(t)| < M$ p. p.

La condition (2.5) est suffisante. Soit $|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)| < M$. Alors, pour $m \leqslant n$,

$$2M^2 \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)]^2\, dt =$$

$$\geqslant \frac{1}{2} (\chi_{0,n}^{(k)} a_0)^2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (\chi_{\nu,n}^{(k)})^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} (\chi_{0,n}^{(k)} a_0)^2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} (\chi_{\nu,n}^{(k)})^2 (a_\nu^2 + b_\nu^2),$$

d'où, lorsque $n \to \infty$, résulte

$$\tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \leqslant 2M^2 \text{ pour tout } m,$$

c. à. d. la convergence de la série

$$\tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

D'après le théorème de Riesz—Fischer, T est la série de Fourier d'une fonction $x(t) \in L^2$. Donc, d'après (5.2), $\mathfrak{H}_n^{(k)}(T) \to x(t)$ p. p.; en faisant $n \to \infty$ dans $|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)| < M$ résulte alors $|x(t)| \leqslant M$ p. p.

2° *L'espace L.* La condition (2.5) est nécessaire. En effet, si T est la dérivée formelle de la série de Fourier d'une fonction $X(t)$ à variation bornée, on a par définition ([6], § 1.47, p. 8 et § 2.14, p. 16)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nt\, dX(t), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nt\, dX(t).$$

Donc,

$$\mathfrak{H}_n^{(k)}(T) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n^{(k)}(t-u)\, dX(u),$$

d'où

$$|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t-u)|\,|dX(u)|.$$

En intégrant par rapport à t, on obtient

$$\|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)\|_L = \int_0^{2\pi} |\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t-u)|\,|dX(u)| =$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |dX(u)| \int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t-u)|\, dt,$$

d'où, le noyau $K_n^{(k)}(t)$ étant quasi-positif et la fonction $X(t)$ à variation bornée, résulte l'affirmation.

La condition (2.5) est suffisante. En effet, elle se traduit par le fait que la suite de fonctions

$$X_n(t) = \int_0^t \mathfrak{H}_n^{(k)}(T)\, du, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

est à variation uniformément bornée dans $(0, 2\pi)$. Comme $X_n(0) = 0$, d'après le théorème de Helly ([6], § 3.31, p. 80), il existe une suite partielle $X_{n_i}(t)$ uniformément bornée qui converge pour tout t vers une fonction $X(t)$ à variation bornée.

Or, pour $n_i \geqslant m$

$$\chi_{m,n_i}^{(k)} a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_{n_i}^{(k)}(T) \cos mt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} X_{n_i}(2\pi) + \frac{m}{\pi} \int_0^{2\pi} X_{n_i}(t) \sin mt\, dt,$$

d'où, en faisant $n_i \to \infty$ et en appliquant le théorème de Lebesgue, résulte

$$a_m = \frac{1}{\pi} X(2\pi) + \frac{m}{\pi} \int_0^{2\pi} X(t) \sin mt\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos mt\, dX(t).$$

Donc a_m, et on démontre de la même manière pour b_m, sont les coefficients de la dérivée formelle de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée $X(t)$, C. Q. F. D.

3° *L'espace* L^p, $p > 1$. La condition (2.5) est nécessaire. Si T est la série de Fourier d'une fonction $x(t) \in L^p$, on a

$$|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t-u)|\,|x(u)|\, du.$$

En appliquant l'inégalité de Jensen ([6], § 4.41, p. 68 avec $\varphi(u) = u^p$) et en tenant compte de la quasi-positivité du noyau $K_n^{(k)}(t)$, on obtient en premier lieu

$$|\mathfrak{H}_n^{(k)}(T)|^p \leqslant \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_{n_i}^{(k)}(t-u)|\,|x(u)|\, du \right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^p} \int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t-u)|\, du \Big\}^{p-1} \int |K_n^{(k)}(t-u)|\,|x(u)|^p\, du \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^{2\pi} |K_n^{(k)}(t-u)|\,|x(u)|^p\, du.$$

En second lieu, en intégrant par rapport à t

$$\| \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) \|_{L^p} = \int_0^{2\pi} | \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) |^p \, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} | K_n^{(k)}(t-u) | \, | x(u) |^p \, du$$

$$\leqslant M \int_0^{2\pi} | x(u) |^p \, du \cdot \int_0^{2\pi} | K_n^{(k)}(t-u) | \, dt = O(1),$$

d'où la première moitié de l'affirmation.

La condition (2.5) est suffisante. En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient d'abord

$$\| \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) \|_L \leqslant (2\pi)^{1-1/p} \| \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) \|_{L^p} = O(1).$$

Donc, d'après 2° du lemme 2, T est la dérivée formelle de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée $X(t)$. Or, on peut démontrer, comme dans [6], § 4.33, p. 84, que $X(t)$ est absolument continu; donc ([6], § 1.47, p. 8), en posant $X' = x$, T est la série de Fourier de x. Par conséquent, d'après (5.2), $\mathfrak{H}_{(n)}^{(k)}(T) \to x$ p. p. Pour démontrer que $x \in L^p$, nous remarquons que (2.5) entraîne, en appliquant le lemme de Fatou,

$$O(1) \geqslant \liminf_{n=\infty} \int_0^{2\pi} | \mathfrak{H}_n^{(k)}(T) |^p \, dt \geqslant \int_0^{2\pi} | x(t) |^p \, dt.$$

6. Démonstration du théorème. Soit x un élément de l'un des espaces $C, L, L^p \, (p > 1)$ et soit F

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t$$

la série de Fourier de x. Appliquons-lui le procédé $H^{(k)}$. Comme

$$| 1 - h_{\nu, n}^{(k)} | \sim A_\nu \frac{\log^{k-1} n}{n}, \quad n \to \infty, \quad \text{avec } A_\nu > 0,$$

la condition (1.1) est bien satisfaite; la meilleure approximation fournie par le procédé $H^{(k)}$ est donc d'ordre $(\log n)^{k-1}/n$ et $H^{(k)}$ admet dans chacun des espaces C, L, L^p une classe de saturation.

Pour déterminer ces classes nous remarquons que le lemme 1, formulé et demontré pour les séries numériques, s'étend immédiatement aux séries dont les termes appartiennent à un espace vectoriel normé: en effet, il n'y a qu'à remplacer les valeurs absolues par les normes dans la formulation et dans la démonstration du lemme 1.

Grâce à cette remarque, l'appliquation du lemme 1, avec $\alpha=0$ et $\beta=k-1$, à la série F donne: pour qu'on ait

$$\| H_n^{(k)}(F) - x \|_{C, L^p} = O\left(\frac{\log^{k-1} n}{n}\right)$$

il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\| \mathfrak{H}_n^{(k)}(\bar{F}) \|_{C, L^p} = O(1), \tag{6.1}$$

où $\bar{F}$ désigne la série trigonométrique

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,(a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t).$$

D'après le lemme 2, (6.1) signifie que $\bar{F}$ est

1° la série de Fourier d'une fonction bornée p. p., lorsqu'on se place dans l'espace C;

2° la dérivée formelle de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée, lorsqu'on se place dans l'espace L;

3° la série de Fourier d'une fonction appartenant à L^p, $p > 1$, lorsqu'on se place dans l'espace L^p.

Or, $\bar{F}$ n'est que la dérivée formelle (au signe près) de la série conjuguée de $x(t)$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-a_\nu \sin \nu t + b_\nu \cos \nu t).$$

Par conséquent, si $\bar{x}(t)$ désigne la fonction conjuguée de $x(t)$ (déterminée à une constante additive près par la fonction $x(t)$), de 1° - 3° résulte l'affirmation du théorème.

(Reçu le 17 septembre 1958)

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Alexits — A Fourier-sor Cesàro-középeivel való approximáció nagyságrendjéről. *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941), p. 410–21.

[2] ————— Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér. *Acta math. Hungaricae* **3** (1952), p. 29–42.

[3] J. Favard — Sur la saturation des procédés de sommation. *Journ. de Math.* **35**, fasc. III (1956).

[4] M. Zamansky — Classes de saturation... *Ann. Ec. Norm. sup.* (3) **66** (1949), p. 19–93.

[5] ————— Sur la sommation des séries de Fourier. *Comptes rendus Paris* **231** (1950), p. 1118 – 1120.

[6] A. Zygmund — Trigonometrical series, Monografje matematyczne, second edition, 1952.