SUR UNE SOLUTION MONOTONE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

Par

M. BAJRAKTAREVIĆ (Sarajevo)

SOMMAIRE. — Démonstration de l'existence d'une solution unique monotone d'une équation fonctionnelle (ce dernier problème étant déjà traité [1] d'un autre point de vue et dans les conditions tout à fait différentes).

1. — *NOTATIONS.* À tout nombre $i=0,1,\ldots,N$ on fait correspondre une courbe continue, strictement croissante

$$J=h(i,x) \quad (x \in J=[a_1, a_2])$$

avec

$$h(i,x)<h(i+1,x),$$

$$h(0,a_1)=a_1, \quad h(N,a_2)=a_2, \tag{1}$$

$$h(i,a_2)=h(i+1,a_1).$$

On obtient ces courbes en appliquant la surface d'un cylindre sur un plan après avoir fait tracer une curbe faisant $N+1$ fois le tour de ce cylindre.

À toute suite $\{d_\nu\}$ des nombres $d_\nu\,(\nu=0,1,2,\ldots)$ dont chacun est égal à un des nombres $0,1,\ldots,N$ correspond une suite de fonctions

$$h_0(t)=h(d_0,t), \; h_{\nu+1}(t)=h_\nu\{h(d_{\nu+1},t)\} \tag{2}$$

continues et strictement croissantes. On suppose toujours

$$h_\nu(a_2)-h_\nu(a_1)\downarrow 0 \quad (\nu\to+\infty)$$

de sorte que

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(t)=z \quad (z\in J, t\in J)$$

réalise une correspodance biunivoque entre les suites $\{d_\nu\}$ et les nombres $z \in J$ excepté les suites $\{d_\nu^{(i)}\}$ $(i=1,2)$ définies par

$$
\begin{aligned}
&d_\nu^{(1)}=d_\nu^{(2)} \quad (\nu=0,1,\ldots,k-1;\ \ k\geqslant 1),\\
(3)\qquad &d_k^{(1)}=i, \quad d_k^{(2)}=i+1 \quad (i=0,1,\ldots,N-1;\ \ k\geqslant 0),\\
&d_\nu^{(1)}=N, \quad d_\nu^{(2)}=0 \quad (\nu=k+1,k+2,\ldots),
\end{aligned}
$$

auxquelles correspond un même nombre z. On désignera ces nombres exceptionnels par $z_{(1)}$ ou $z_{(2)}$, suivant qu'il seront définis par $\{d_\nu^{(1)}\}$ ou par $\{d_\nu^{(2)}\}$. Par suite on écrira

$$
z=\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}=\{d_\nu\}, \tag{4a}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
z_{(1)}&=\{d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}, d_k^{(1)}, N, N, N, \ldots\}=\{d_\nu^{(1)}\},\\
z_{(2)}&=\{d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}, d_k^{(2)}, 0, 0, 0, \ldots\}=\{d_\nu^{(2)}\}.
\end{aligned}
\right. \tag{4b}
$$

En introduisant les notations

$$
z^{(\nu)}=\{d_\nu, d_{\nu+1}, \ldots\} \quad (\nu=0,1,2,\ldots;\ z^{(0)}\equiv z)
$$

on a, d'après (2),

$$
z^{(\nu)}=h\{d_\nu, z^{(\nu+1)}\}, \quad z^{(\nu+1)}=g\{d_\nu, z^{(\nu)}\}, \tag{5}
$$

$g(i,t)$ étant la fonction inverse de $h(i,t)$ par rapport à t.

Enfin, les nombres

$$
0<\varepsilon^{(1)}=\varepsilon(0)<\varepsilon(1)<\cdots<\varepsilon(N)=\varepsilon^{(2)}
$$

étant donnés, à chaque nombre z $\{(4a)$ ou $(4b)\}$ corespond une suite $\{\varepsilon_\nu\}$ et une seule des nombres ε_ν définis par $\varepsilon_\nu=\varepsilon(d_\nu)$, cette correspondance étant biunivoque.

2. *RESULTAT.* — Le résultat de ce travail est donné par le

THÉORÈME. — *Si $f(z,t)$ $(z\in J,\ -\infty<t<+\infty)$ est une fonction continue, strictement croissante par rapport aux variables z et t, remplissant les conditions:*

1° *$t_0^{(1)}$ et $T_0^{(1)}$ respectivement $t_0^{(2)}$ et $T_0^{(2)}$ étant deux solutions voisines de l'équation*

$$
t=\varepsilon^{(1)} f(a_1, t),
$$

respectivement de l'équation

$$t = \varepsilon^{(2)} f(a_2, t),$$

telles que

$$t_0^{(1)} < T_0^{(1)} < T_0^{(2)} < t_0^{(2)}$$

et telles que entre $T_0^{(1)}$ *et* $T_0^{(2)}$ *il n'existe aucune autre solution de ces équations, on a*

$$\varepsilon^{(1)} f(z, t) > t \qquad pour \qquad z \in J, t_0^{(1)} \leqslant t \leqslant T_0^{(1)},$$

$$\varepsilon^{(2)} f(z, t) < t \qquad pour \qquad z \in J, T_0^{(2)} \leqslant t \leqslant t_0^{(2)},$$

avec

$$(z-a_i)^2 + (t - t_0^{(i)})^2 > 0, \quad (z-a_i)^2 + (t - T_0^{(i)})^2 > 0, \quad i = 1, 2;$$

2°

$$\frac{\varepsilon(i+1)}{\varepsilon(i)} \geqslant \frac{f\{h(i, a_2), T_0^{(2)}\}}{f\{h(i, a_2), T_0^{(1)}\}} (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

$$f\{h(0, a_2), \quad T_0^{(1)}\} > 0,$$

alors on a:

L'équation fonctionnelle

$$F(z) = \varepsilon_0 f\{z, F[g(d_0, z)]\} \, (z \in J; t_0^{(1)} < F(z) < t_0^{(2)}) \tag{6}$$

admet une solution et une seule $F(z) = \xi(z)$ *strictement monotone, définie presque partout dans* J *et comprise dans* $(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$. *Cette solution croît de la valeur* $\xi(a_1) = T_0^{(1)}$ *jusqu'à la valeur* $\xi(a_2) = T_0^{(2)}$.

3. *DÉMONSTRATION.* — Considérons la suite définie par

$$x_0(z, t) = \varepsilon_0 f(z, t), \quad x_{\nu+1}(z, t) = x_\nu\{z, \varepsilon_{\nu+1} f\{z^{(\nu+1)}, t\}\}. \tag{7}$$

Sans faire usage de la condition 2°, on démontre facilement les propriétés a), b), ..., g) de la suite (7).

a) $x_\nu(z, t)$ est une fonction continue de $t \, (-\infty < t < +\infty)$ pour chaque $z \in J$; pour chaque t elle est, par rapport à z, continue et strictement croissante par segments, admettant, en général, des sauts aux point (4 b).

b) La fonction $x_\nu(z, t)$ est strictement croissante par rapport à t.

c) $$x_\nu(a_i, t) \uparrow T_0^{(i)} \quad (t_0^{(1)} < t < T_0^{(i)}),$$
$$x_\nu(a_i, t) \downarrow T_0^{(i)} \quad (T_0^{(i)} < t < t_0^{(2)}), \quad (i=1,2).$$
$$x_\nu(a_i, T_0^{(i)}) = T_0^{(i)},$$

d) Pour $z = z_{(i)}$ $(i=1,2)$
$$x_\nu(z_{(i)}, t) \uparrow x_{k-1}\{z, \varepsilon(d_k^{(i)}) f\{(z_{(i)})^{(k)}, \ T_0^{(3-i)}\}\}, \quad t_0^{(1)} < t < T_0^{(3-i)},$$
$$x_\nu(z_{(i)}, t) \downarrow x_{k-1}\{z, \varepsilon(d_k^{(i)}) f\{(z_{(i)})^{(k)}, \ T_0^{(3-i)}\}\}, \quad T_0^{(3-i)} < t < t_0^{(2)},$$
$$(\nu \to +\infty);$$
$$x_\nu(z_{(i)}, T_0^{(3-i)}) = x_{k-1}\{z, \in (d_k^{(i)}) f\{(z_{(i)})^{(k)}, T_0^{(3-i)}\}\} \ (\nu \geqslant k; \ i=1,2)$$

e) La suite (7) est croissante ou décroissante suivant que
$$t_0^{(1)} \leqslant t \leqslant T_0^{(1)} \quad \text{ou} \quad T_0^{(2)} \leqslant t \leqslant t_0^{(2)}.$$

f) La suite (7) est bornée:

(8) $$x_\nu(a_1, t) \leqslant x_\nu(z, t) \leqslant x_\nu(a_2, t) \quad (z \in J; -\infty < t < +\infty)$$

d'où, d'après b) et la définition des $t_0^{(1)}$, $t_0^{(2)}$, on a
$$t_0^{(1)} \leqslant x_\nu(z, t) \leqslant t_0^{(2)} \quad (z \in J, \ t_0^{(1)} \leqslant t \leqslant t_0^{(2)}).$$

g) D'après e) et f), la suite (7) est convergente pour tout $z \in J$ et pour tout $t \in [t_0^{(1)}, T_0^{(1)}] \, U \, [T_0^{(2)}, t_0^{(2)}]$ et on a, d'après (8) et c),
$$T_0^{(1)} \leqslant \lim_{\nu\to\infty} x_\nu(z, t) \leqslant T_0^{(2)} \quad \{z \in J, t \in [t_0^{(1)}, T_0^{(1)}] \, U \, [T_0^{(2)}, t_0^{(2)}]\}.$$

Pour simplifier l'écriture on utilisera les notations:
$$\xi(z, t) = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu(z, t), \quad \underline{\xi}(z, t) = \varliminf_{\nu\to\infty} x_\nu(z, t), \quad \bar{\xi}(z, t) = \varlimsup_{\nu\to\infty} x_\nu(z, t);$$
$$\underline{\eta}(z, t) = \underline{\xi}(z-0, t) = \lim_{\bar{z}\uparrow z} \underline{\xi}(\bar{z}, t), \quad \bar{\eta}(z, t) = \bar{\xi}(z+0, t) = \lim_{\bar{z}\downarrow z} \bar{\xi}(\bar{z}, t).$$

Dans les conditions du Théorème, y compris la condition 2°, on a:

h) $$\xi(z_{(i)}, t_1) = \xi(z_{(i)}, t_2) \quad (t_0^{(1)} < t_1 \leqslant t_2 < t_0^{(2)}; \quad i=1,2),$$

(9) $$\xi(z_{(1)}, t) \underset{(=)}{<} \xi(z_{(2)}, t) \quad (t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}),$$

l'égalité dans (9) n'étant valable que lorsque la condition 2° est vérifiée par les égalités seules pour tour $\nu = 0, 1, \ldots, N-1$.

La première relation est en réalité d). (9) découle de 2°, d), b) et (1) tenant compte de ce que l'on a, d'après (4 b), (3) et (1),

$$(z_{(1)}^{(k)}) = h\,(d_k^{(1)},\ a_2) = h\,(d_k^{(2)},\ a_1) = (z_{(2)})^{(k)}.$$

i) $$\xi\,(z_1\,,\,t) < \xi\,(z_2\,,\,t)$$

$$(z_1\,,\,z_2 \in J,\ z_1 < z_2\,;\quad t \in (t_0^{(1)},\ T_0^{(1)}]\,U\,[T_0^{(2)},\ t_0^{(2)}).$$

En effet, pour $z_1 = z_{(1)}\,,\ z_2 = z_{(2)} - z_{(1)}$ et $z_{(2)}$ étant deux formes d'un même nombre z données par (4 b) — c'est (9).

Ce cas exclu, soit

$$z_1 = \{d_0\,,\,d_1\,,\,d_2\,,\ldots\} < \{\bar{d}_0\,,\,\bar{d}_1\,,\,\bar{d}_2\,,\ldots\} = z_2\,,$$

z_1 et z_2 étant deux nombres quelconques de J. Alors il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que

$$d_\nu = \bar{d}_\nu\ (\nu = 0, 1, \ldots, k-1;\ k > 0),\ \mu = d_k < \bar{d}_k\ (k \geqslant 0).$$

Considérons maintenant les nombres (4 b) avec $d_k^{(1)} = \mu$. On aura évidemment

$$z_1 \begin{matrix} < \\ \leqslant \end{matrix} z_{(1)} = z_{(2)} \begin{matrix} \leqslant \\ < \end{matrix} z_2\,,$$

où sont valables simultanément ou les signes supérieurs ou les signes inférieurs seulement.

Pour fixer les idées supposons $z_1 < z_{(1)} = z_{(2)} \leqslant z_2$. On aura

$$(z_1)^{(i)} \leqslant (z_{(1)})^{(i)},\quad (z_{(2)})^{(i)} \leqslant (z_2)^{(i)}\quad (\mathrm{i} = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(1)} < \varepsilon_k^{(2)} < \bar{\varepsilon}_k\,;\quad \varepsilon_i \leqslant \varepsilon^{(2)},\quad \varepsilon^{(1)} \leqslant \bar{\varepsilon}_i\quad (i \geqslant k+1),$$

$\varepsilon_i\,,\ \varepsilon_i^{(1)},\ \varepsilon_i^{(2)},\ \bar{\varepsilon}_i$ correspondant respectivement aux nombres $z_1\,,\ z_{(1)},\ z_{(2)},\ z_2$ et l'égalité $(z_1)^{(i)} = (z_{(1)})^{(i)}$ ne pouvant être valable que pour $i > k+1$ Par suite on a

(10) $$x_\nu(z_1\,,\,t) < x_\nu\,(z_{(1)}\,,\,t),\quad x_\nu\,(z_{(2)}\,,\,t) \leqslant x_\nu\,(z_2\,,\,t)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots;\quad t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}),$$

l'égalité dans la dernière relation étant valable seulement lorsque $z_{(2)} = z_2$.

Pour $\nu \to \infty$, d'après (9) et g), on tire

$$\xi(z_1, t) < \xi(z_{(1)}, t) \underset{[=]}{\leq} \xi(z_{(2)}, t) \leq \xi(z_2, t)$$

$$(t_0^{(1)} < t \leq T_0^{(1)} \text{ ou } T_0^{(2)} \leq t < t_0^{(2)},\ a_1 \leq z_1 < z_2 \leq a_2),$$

le premier signe d'égalité n'étant valable que lorsqu' il en est de même dans 2° pour tout $\nu = 0, 1, \ldots, N-1$. Le deuxième signe d'égalité est valable pour $z_2 = z_{(2)}$ seulement, À gauche on a mis $<$ puisque, d'après (10) et g), on a

$$\xi(z_1, t) = x_{k+1}\ (z_1,\ \xi((z_1)^{(k+2)},\ t)) < x_{k+1}(z_{(1)},\ T_0^{(2)}) = \xi(z_{(1)},\ t).$$

On obtient un résultat. analogue aussi dans le cas $z_1 \leq z_{(1)} = z_{(2)} < z_2$.

j) Les $\underline{\overline{\eta}}(z, t)$ sont strictement croissantes par rapport à $z \in J$ et indépendantes de $t \in (t_0^{(1)},\ t_0^{(2)})$ et, par conséquent, continues presque partout dant J, et, si l'on désigne par $\bar{J}$ l'ensemble de leurs points de continuité, on a

$$\underline{\eta}(z, t) = \underline{\eta}(z) = \xi(z, t) = \xi(z) = \overline{\eta}(z, t) = \overline{\eta}(z), \qquad z \in \bar{J};$$

$$\underline{\eta}(z, t) = \underline{\eta}(z) \leq \underline{\xi}(z, t) \leq \bar{\xi}(z, t) \leq \overline{\eta}(z, t) = \overline{\eta}(z), \qquad z \in J - \bar{J},$$

$$t \in (t_0^{(1)},\ t_0^{(2)}).$$

Pour le démontrer remarquons qu'il s'ensuit de i) que $\xi(z, t)$ est une fonction continue de z presque partout dans J et pour chaque

$$t \in (t_0^{(1)},\ T_0^{(1)}]\ U\,[T_0^{(2)},\ t_0^{(2)}).$$

Soit d'abord

$$t, t_1, t_2 \in (t_0^{(1)},\ T_0^{(1)}]\ U\,[T_0^{(2)}, t_0^{(2)}), \quad t_1 < t_2.$$

Considérons une suite quelconque des nombres strictement croissants $\{z_\nu\}$ convergente vers z et une suite des nombres $\bar{z}_\nu$ de la forme $z_{(1)}$ (ou $z_{(2)}$) tels que

$$\bar{z}_\nu \leqslant z_\nu \leqslant \bar{z}_{\nu+1} < z \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Or, d'après i), pour chaque $t \in (t_0^{(1)},\ T_0^{(1)}]\ U\,[T_0^{(2)},\ t_0^{(2)})$ on a

$$\xi(\bar{z}_\nu, t) \leqslant \xi(z_\nu, t) \leqslant \xi(\bar{z}_{\nu+1}, t) < \xi(z, t).$$

D'après d) et b) pour $\nu \to \infty$, on aura

$$\xi(\bar{z}_\nu, t_1) \leqslant \xi(z_\nu, t_1) \leqslant \xi(z_\nu, t_2) \leqslant \xi(\bar{z}_{\nu+1}, t_1) < \xi(z, t_1) \leqslant \xi(z, t_2),$$

d'où, à cause de

$$\lim_{\nu\to\infty} \xi(\bar{z}_\nu, t_1) = \lim_{\nu\to\infty} \xi(\bar{z}_{\nu+1}, t_1),$$

$$\lim \xi(z_\nu, t_1) = \lim \xi(z_\nu, t_2) \leqslant \xi(z, t_1) \leqslant \xi(z, t_2) \qquad (\nu \to \infty).$$

Tenant compte de ce que la suite $\{z_\nu\}$ et les t_1, t_2 sont entièrement arbitraires, il s'ensuit

$$\underline{\eta}(z, t) = \underline{\eta}(z) \leqslant \xi(z, t_1) \leqslant \xi(z, t_2).$$

D'une manière analogue on démontre la relation

$$\xi(z, t_1) \leqslant \xi(z, t_2) \leqslant \bar{\eta}(z, t) = \bar{\eta}(z).$$

Maintenant, si $\xi(z, t)$ est continue dans J pour une valeur de t, $\underline{\eta}(z, t) = \bar{\eta}(z, t)$, et, d'après ce qu'on vient de démontrer,

$$\underline{\eta}(z) = \xi(z, t_1) = \xi(z, t) = \xi(z) = \bar{\eta}(z),$$

d'où résulte la continuité des $\underline{\eta}(z)$ et des $\bar{\eta}(z)$. La monotonie des $\bar{\underline{\eta}}(z)$ résulte de la monotonie de $\xi(z, t)$. Ainsi la démonstration est terminée pour $t \in (t_0^{(1)}, T_0^{(1)}] \, U \, [T_0^{(2)}, t_0^{(2)})$.

En choisissant maintenant

$$t_1 \in (t_0^{(1)}, T_0^{(1)}], \quad t \in (T_0^{(1)}, T_0^{(2)}), \quad t_2 \in [T_0^{(2)}, t_0^{(2)}),$$

on a, d'après b),

(11) $$x_\nu(\bar{z}, t_1) < x_\nu(\bar{z}, t) < x_\nu(\bar{z}, t_2) \quad (z \in J)$$

puis, d'après g),

$$\xi(\bar{z}, t_1) \leq \underline{\xi}(\bar{z}, t) \leq \bar{\xi}(\bar{z}, t) \leq \xi(\bar{z}, t_2),$$

ensuite, pour $\bar{z} \uparrow z \in J$ ($\bar{z} \downarrow z \in J$)

$$\underline{\eta}(z, t_1) \leq \underline{\eta}(z, t) \leq \underline{\eta}(z, t_2), \quad (\bar{\eta}(z, t_1) \leq \bar{\eta}(z, t) \leq \bar{\eta}(z, t_2)),$$

et enfin, d'après (11) (pour $\bar{z}=z$ et $\nu\to\infty$), vu ce qu'on vient de dire ci-dessus,

$$\underline{\eta}(z, t_1)=\underline{\eta}(z, t)=\underline{\eta}(z, t_2)\leq\bar{\xi}(z, t_1)\leq\underline{\xi}(z, t)\leq\bar{\xi}(z, t)\leq$$

$$\leq\xi(z, t_2)\leq\bar{\eta}(z, t_2)=\bar{\eta}(z, t)=\bar{\eta}(z, t_1)$$

ce qui donne le résultat dans ce cas aussi.

k) Les fonctions $\bar{\underline{\eta}}(z)$, $\bar{\underline{\xi}}(z, t)$ ($z\in J$; $t\in(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$, satisfont à l'équation fonctionnelle (6).

Pour le démontrer, on écrit, d'après (7),

$$x_{\nu+1}(\bar{z}, t)=\varepsilon_0 f(\bar{z}, x_\nu(\bar{z}^{(1)}, t)) \quad (\bar{z}\in J;\ t_0^{(1)}<t<t_0^{(2)}),$$

où l'on fait d'abord $\nu\to\infty$ et puis $\bar{z}\downarrow z$ respectivement $\bar{z}\uparrow z$.

Pour achever la démonstration du Théorème, remarquons que l'équation (6), dans laquelle $F(z)\in(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ $(z\in J)$ représente une de ses solutions monotones quelconques, peut être écrite, d'après (7) et (5), dans la forme

$$(6_{\nu+1}) \qquad F(z)=x_\nu(z, F(z^{(\nu+1)})).$$

$z^*=\{d_0^*, d_1^*, d_2^*, \ldots\}$ et $z=\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$ étant deux nombres quelconques de J et z_ν étant la suite des nombres

$$z_\nu=\{d_0, d_1, \ldots, d_\nu, d_0^*, d_1^*, d_2^*, \ldots\}$$

on a les relations

$$(z_\nu)^{(\nu+1)}=z^*,$$

$$z_\nu\begin{cases}\to z & \text{pour} \quad z\neq z_{(i)}, \\ \uparrow z_{(1)} & \text{pour} \quad z=z_{(1)}, \ (\nu\to\infty). \\ \downarrow z_{(2)} & \text{pour} \quad z=z_{(2)},\end{cases}$$

D'après $(6_{\nu+1})$, on a

$$F(z_\nu)=x_\nu(z_\nu, F(z^*)).$$

En y posant

$$F(z^*)=\tau \quad (t_0^{(1)}<\tau<t_0^{(2)}),$$

elle devient

$$F(z_\nu) = x_\nu(z_\nu, \tau).$$

Premier cas: $\tau \in (t_0^{(1)}, T_0^{(1)})$. D'après e) on a

$$x_n(z_\nu, \tau) \leqslant x_\nu(z_\nu, \tau) \quad (n \leqslant \nu).$$

En y faisant d'abord $\nu \to \infty$, puis $n \to \infty$, on obtient

$$\xi(z, \tau) \leqslant \underline{\lim}\, x_\nu(z_\nu, \tau) = \underline{\lim}\, F(z_\nu) \quad (\nu \to \infty),$$

d'où l'on tire $T_0^{(1)} \leqslant F(z)$ et par conséquent $\tau \geqslant T_0^{(1)}$ ($z \in J$, étant arbitraire, peut être égal à z^*) contrairement à l'hypothèse.

Par un raisonnement analogue on conclut que le cas $\tau \in (T_0^{(2)}, t_0^{(2)})$ aussi est à rejeter.

Troisième cas: $\tau \in [T_0^{(1)}, T_0^{(2)}]$. En choisissant deux nombres t_1, t_2 tels que

$$t_0^{(1)} < t_1 < T_0^{(1)} \leqslant \tau \leqslant T_0^{(2)} < t_2 < t_0^{(2)}$$

on aura, d'après b),

$$x_\nu(z_\nu, t_1) < x_\nu(z_\nu, \tau) < x_\nu(z_\nu, t_2).$$

Par un raisonnement analoque à ceux employés dans les deux cas on arrive aux inégalités

$$\xi(z, t_1) \leq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, t_1), \quad \overline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, t_2) \leq \xi(z, t_2).$$

Comme

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, t_1) \leq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, \tau) \leq \underline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, t_2),$$

$$\overline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, t_1) \leq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, \tau) \leq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, t_2),$$

on conclut que l'on a

$$\xi(z, t_1) \leqslant \underline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, \tau) \leqslant \overline{\lim}_{\nu\to\infty} x_\nu(z_\nu, \tau) \leqslant \xi(z, t_2)$$

donc

$$\xi(z, t_1) \leqslant \underline{\lim}_{\nu \to \infty} F(z_\nu) \leqslant \overline{\lim}_{\nu \to \infty} F(z_\nu) \leqslant \xi(z, t_2)$$

Si $z \in \overline{J}$, alors $\xi(z, t_1) = \xi(z, t_2)$, et

$$F(z) = \xi(z) \qquad (z \in \overline{J}).$$

(Reçu le 17 avril 1957)

RÉFÉRENCE

[1] A. H. Read — The solution of a functional equation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, Sect. A. **63** (1951–52), 342.