Sur une fonctionnelle.

Par

MICHEL PETROVITCH.

Soit

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_p$$

une suite de nombres réels positifs; $f(x)$ une fonction réelle et convexe dans un intervalle (a, b) contenant la suite (1).

Désignons par μ et M la moyenne arithmétique des x_i et celle des $f(x_i)$, de sorte que

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{p},$$

$$M = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_p)}{p}.$$

Il est manifeste que M ne peut pas être considérée comme fonction de μ . Néanmoins, à une variation *donnée* de μ ne correspondent guère une variation entièrement *arbitraire* de M : entre les deux variations existe une certaine loi de dépendance exprimable sous la forme suivante:

La valeur M varie autour de la valeur moyenne

$$(2) \quad \frac{f(p\mu) + pf(\mu) + (p-1)f(0)}{2p}$$

et l'amplitude de ces variations, ne pouvant jamais être dépassée, mais pouvant être effectivement atteinte pour une fonction $f(x)$ quelconque, aura pour valeur

$$(3) \quad \frac{f(p\mu) - pf(\mu) + (p-1)f(0)}{2p}.$$

Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord qu'elle exprime la double inégalité

$$(4) \quad f(\mu) \leq M \leq \frac{(p-1)f(0) + f(p\mu)}{p}$$

et nous allons montrer que celle-ci est valable pour tout x_k positif et pour toute fonction $f(x)$ convexe dans l'intervalle (a, b) .

En ce qu'il concerne la première inégalité (4), c'est l'inégalité bien connue de Jensen valable pour tout x_k réel. Quand à la seconde, elle ne se trouve démontrée dans un de mes travaux ¹⁾ que pour les fonctions $f(x)$ analytiques et à coefficients tayloriens positifs. Cette inégalité est pourtant valable pour toute fonction $f(x)$ convexe dans (a, b) , ce que l'on peut montrer en la déduisant d'une proposition plus générale démontrée par M. J. Karamata dans son travail paru dans ce même volume (p. 145).

La proposition est la suivante:

Pour que l'inégalité

$$(5) \quad \sum_{k=1}^p f(x_k) \leq \sum_{k=1}^p f(X_k),$$

ait lieu pour toute fonction $f(x)$ convexe, il faut et il suffit qu'on ait

$$(6) \quad X_1 + X_1 + \dots + X_k \leq x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

pour tout k égal à $1, 2, \dots, (p-1)$ et

$$(7) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_p = x_1 + x_2 + \dots + x_p,$$

les x_k et X_k étant supposés rangés par ordre de grandeurs croissantes.

En y prenant

$$(8) \quad \begin{aligned} X_1 &= X_2 = \dots = X_{p-1} = 0, \\ X_p &= x_1 + x_1 + \dots + x_p, \end{aligned}$$

les conditions (6) et (7) seront satisfaites pour tout x_k positif, de sorte que l'inégalité (5) dévient

¹⁾ *Théorème sur la moyenne arithmétique des quantités positives* (*Enseign. mathém.* mai-juillet 1916; Genève).

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq (p-1) f(0) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_p)$$

et équivaut à la seconde inégalité (4) qu'il fallait démontrer.

Remarquons que les limites inférieure et supérieure de M , assignées par la double inégalité (4), sont *effectivement atteintes pour une fonction $f(x)$ convexe quelconque*. La limite inférieure est atteinte lorsque tous les x_k sont égaux entre eux, et la limite supérieure lorsqu'ils sont tous nuls, sauf un seul parmi eux.

L'amplitude des variations de M autour de la valeur moyenne (2) s'exprime ainsi à l'aide de la moyenne arithmétique μ de la fonctionnelle

$$(9) \quad \Delta(f, p) = \frac{f(px) - pf(x) + (p-1)f(0)}{p},$$

appliquée à la fonction $f(x)$ et à l'entier p .

2. La fonctionnelle $\Delta(f, p)$ jouit de la propriété arithmétique indiquée dans ce qui suit.

Designons comme *nombre e_p , rattaché à l'entier p* , tout nombre entier positif n pour lequel la différence $p^{n-1} - 1$ est divisible par n sans que p le soit. Désignons par E_p l'ensemble des nombres e_p . Cet ensemble contient tous les *nombres premiers* ne divisant pas p (théorème de Fermat); pour qu'un nombre n , faisant partie de E_p , soit un nombre premier, il suffit que p^x ne soit divisible par n pour x égal à une partie aliquote de $n-1$ (théorème de E. Lucas). L'ensemble E_p contient également des *nombres e_p composés* ne satisfaisant pas à la dernière condition; ces nombres sont d'ailleurs rares. Le plus petit nombre composé parmi les e_2 est le nombre

$$e_2 = 341 = 11 \cdot 31;$$

viennent ensuite les nombres

$$e_2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17,$$

$$e_2 = 4369 = 17 \cdot 257 \text{ etc.}$$

Pour que, par exemple, un nombre entier, compris entre 2 et 341, soit un nombre e_2 , il faut et il suffit qu'il soit premier.

Pour qu'un entier, compris entre 2 et 4369 soit un nombre e_2 , il faut et il suffit qu'il soit premier ou bien qu'il soit 1105.

Faisons parcourir à α la suite des nombres entiers $n = e_p$, et calculons la suite d'entiers correspondants

$$\lambda_n = \frac{p^{n-1} - 1}{n}.$$

Les points du plan, désignés comme *points de Fermat rattachés à l'entier p*, sont les points (α, β) ayant pour abscisse un nombre

$$\alpha = n = e_p$$

et pour ordonnée le nombre correspondant

$$\beta = \lambda_n.$$

Ainsi, dans le cas $p = 2$, ce sont les points ayant pour coordonnées

$$(3, 1), (5, 3), (7, 9), (11, 93), (13, 315) \text{ etc.}$$

Ceci étant, soit

$$(10) \quad \Delta(f, p) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

le développement de la fonctionnelle Δ ; son rayon de convergence sera $\frac{R}{p}$ où R désigne le rayon de convergence de la série

$$(11) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

La propriété en question consiste alors en ceci:

Le coefficient b_n est un multiple entier de na_n pour tout rang n égal à un nombre e_p ; il est un multiple fractionnaire irréductible de na_n pour tout autre rang n .

Car on trouve

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_n = (p^{n-1} - 1) a_n;$$

pour que $\frac{p^{n-1} - 1}{n}$ soit un entier, il faut et il suffit que n soit un nombre e_p .

Il s'en suit que le double de l'amplitude (3) est développable en série des puissances de la moyenne arithmétique μ

$$h_2\mu^2 + h_3\mu^3 + \dots$$

dont le coefficient h_n est un multiple de na_n pour n égal à un nombre e_p et un multiple fractionnaire irréductible pour tout autre rang n .

Dans le cas, par exemple, où les nombres $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont tout compris dans l'intervalle $(0, \frac{1}{p})$, et la fonction $f(x)$ étant

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

on voit que la valeur de la moyenne arithmétique

$$M = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_p} \right],$$

varie autour de sa valeur moyenne

$$\frac{1}{2p} \left[\frac{1}{1-p\mu} + \frac{p}{1-\mu} + p - 1 \right],$$

l'amplitude des variations étant la moitié de

$$\frac{1}{p} \left[\frac{1}{1-p\mu} - \frac{p}{1-\mu} + p - 1 \right] = h_2\mu^2 + h_3\mu^3 + \dots$$

où

$$h_n = p^{n-1} - 1.$$

Pour que, le rang n étant compris entre 2 et 341, le coefficient h_n du développement

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-2x} - \frac{2}{1-x} \right],$$

soit un multiple entier de n , il faut et il suffit que n soit premier.

Envisageons encore la fonctionnelle

$$(12) \quad \Delta(f, p) - mx f' = \frac{1}{p} [f(px) - pf(x) + (p-1)f(0)] - mx f'(x),$$

où m est un paramètre. Son développement suivant les puissances de x a pour coefficient de x^n l'expression

$$(p^{n-1} - mn - 1) a_n;$$

pour qu'il soit nul, il faut et il suffit ou bien que a_n soit nul ou bien que

$$m = \frac{p^{n-1} - 1}{n}.$$

Il s'en suit que: *pour que le terme d'un rang n soit un terme lacunaire du développement (12), il faut et il suffit que point (m, n) soit un point de Fermat rattaché à p , ou bien que n coïncide avec le rang d'un terme lacunaire de $f(x)$.*

3. D'après ce qui précède l'intégrale

$$(13) \quad \Delta_1(f, p) = \int_0^x \Delta(f, p) \frac{dx}{x}$$

est une fonctionnelle jouissant de la propriété que *le coefficient g_n de son développement*

$$(14) \quad \Delta_1(f, p) = g_2 x^2 + g_3 x^3 + \dots$$

est un multiple entier du coefficient a_n toutes les fois que n est un nombre e_p ; c'est un multiple fractionnaire de a_n pour tous les autres rangs n .

Car on a

$$g_n = \frac{p^{n-1} - 1}{n} a_n.$$

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$(15) \quad \Delta_1(f, 2) = \frac{1}{2} \int_0^x [f(2x) - 2f(x) + f(0)] \frac{dx}{x},$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque positive et convexe dans l'intervalle (a, b) , holomorphe pour $x=0$. Pour que, le rang n compris entre 2 et 341, le coefficient g_n soit multiple entier du coefficient correspondant a_n de $f(x)$, il faut et il suffit que n soit premier.

Dans le cas particulier où

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

on trouve que

$$\Delta_1(f, 2) = \frac{1}{2} \log \frac{(1-x)^2}{1-2x},$$

et cette fonction jouit, en effet, de la propriété que son coefficient de x_n est un nombre entier ou fractionnaire suivant que n

est un nombre e_2 ou non. Parmi les coefficients dont le rang est compris entre 2 et 341, ceux dont le rang est un nombre premier, sont des entiers; les coefficients de rang égal à un nombre composé sont des nombres fractionnaires.

Envisageons encore l'intégrale curviligne

$$(16) \quad J(\alpha, \beta) = \int \frac{\Delta(f, p) - \beta f}{z^\alpha + 1} dz,$$

[où f désigne $f(z)$, α et β étant deux paramètres], prise le long d'un contour fermé ne contenant aucune singularité de f .

Comme l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^\alpha + 1}$$

est nulle pour toute valeur entière de α , l'intégrale J se réduit à

$$J(\alpha, \beta) = \int \left[\frac{1}{p} f(pz) - \beta f(z) \right] z^{-\alpha} dz.$$

L'équation indéterminée $J(\alpha, \beta) = 0$ a une infinité de solutions en nombres entiers positifs: *pour qu'une paire d'entiers positifs* (α, β) *en soit une, il faut et il suffit: ou bien que le point* $(\alpha - 1, \beta)$ *soit un point de Fermat rattaché à l'entier* p , *ou bien que* $\alpha - 1$ *coïncide avec le rang d'un terme lacunaire du développement de* $f(z)$.

Car on trouve pour α entier

$$J(\alpha, \beta) = (\lambda_{\alpha-1} - \beta) a_{\alpha-1}.$$

Si l'on prend pour le contour d'intégration le cercle ayant pour centre l'origine, et pour rayon une longueur plus petite que $\frac{R}{p}$, on aura une proposition analogue pour les intégrales définies de la forme

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{p} f(pre^{ti}) - \beta f(re^{ti}) \right] e^{-\alpha ti} dt.$$

Pour α entier l'intégrale a pour valeur

$$2\pi r^\alpha (\lambda_{\alpha} - \beta) a_{\alpha}.$$

de sorte que, par exemple, l'intégrale

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} f(2re^{ti}) - \beta f(re^{ti}) \right] e^{-\alpha t} dt,$$

jouit de la propriété suivante:

Pour que $H(\alpha, \beta)$ s'annule en un point $(\alpha, \beta = \text{entiers positifs})$ du plan $\alpha\beta$, compris entre les deux droites $\alpha = 2$ et $\alpha = 341$, il faut et il suffit: ou bien que α soit un nombre premier et β l'ordonné du point de Fermat correspondant, ou bien que α coïncide avec le rang d'un terme lacunaire de $f(z)$.

La proposition s'applique manifestement à des intégrales réelles de la forme

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t, \beta) \cos \alpha t dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \Phi(t, \beta) \sin \alpha t dt,$$

dépendant d'une fonction $f(z)$ convexe arbitraire, et où le paramètre β figure linéairement, ainsi qu'aux solutions entières purement imaginaires d'intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t, \beta) e^{ct} dt.$$