НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXX, 3-4 (2025), 73–80

Др Александар Липковски

ТРИ НЕРЕШИВА АНТИЧКА ПРОБЛЕМА

Математички проблеми су у античкој Грчкој углавном решавани геометријски, помоћу конструкција одговарајућих кривих линија као геометријских места тачака (лат. *locus* – место) у равни. Најједноставније криве у равни које су стари Грци користили су права и круг (кружна линија или кружница у другој, по ауторовом мишљењу неодговарајућој терминологији). И док је дефиниција круга као места тачака које су једнако удаљене од фиксиране тачке као центра била позната много пре Еуклида и базира се на појму удаљености, код „дефиниције“ праве[1] настају проблеми који, како знамо од времена Лобачевског, потичу из самог приступа излагању геометрије. Конструкције геометријских фигура, пре свега троуглова, које и данас спадају у основношколску математику представљају коришћење у планиметрији два основна инструмента, шестара и лењира (без подељака)[2] за цртање ове две криве: круга и праве.

Под (планиметријском) конструкцијом се подразумева поступак описан поступно, корак по корак, или како бисмо данас рекли алгоритамски поступак, у коме се примењују искључиво та два поменута инструмента – шестар и лењир, тј. цртају кругови и праве и којим се решава постављени задатак, што се на крају и доказује. Тај поступак је састављен од пет врста елементарних корака, који су:

- цртање праве кроз две дате тачке,
- цртање круга са датим центром и полупречником,
- одређивање тачке у пресеку две дате праве,
- одређивање пресечних тачака праве и круга,
- одређивање пресечних тачака два круга.

Поступак је аналитичко-синтетички, дакле мисаони, и није од значаја што је физичко извођење конструкције – реално цртање правих и кругова на папиру

[1] Како пише Еуклид у преводу Билимовића, „права линија је она, која за тачке на њој подједнако лежи“.

[2] Српски језик не разликује ова два појма, лењир је лењир. Помињање подељака треба да читаоцу предочи чињеницу да се приликом конструкција растојања на лењиру не користе. Ово је важно, јер се често у школи користе управо растојања приликом цртања, на пример, средишта дужи: мери се дуж, мерни број дели са 2 и онда црта дуж те дужине. Добро би било коришћење одговарајуће српске речи *равнало* у том контексту, али се, нажалост, то сматра кроатизмом. Енглески језик та два појма разликује: *ruler* и *straightedge*.

и њихово пресецање по самој својој суштини увек недовољно прецизно, а његова прецизност зависи од фактора ирелевантних за математику: прецизности инструмената, оштрине оловке и умешности цртача. Оно што математичара интересује је идеални, а не реални поступак и резултат. Наравно, умеће коришћења инструмената, на коме у основној школи треба да се инсистира и које не сме да се из школе изостави[3], саставни је део развоја геометријских знања, исто као што је и таблица множења и умеће рачунања са целим бројевима основ даљег развоја алгебарских појмова.

Ако конструкције преведемо на језик аналитичке геометрије, видимо да ће координате тачака дужи добијених конструкцијама лењиром и шестаром бити решења система линеарних и квадратних једначина са две непознате: једначина праве у равни је $ax+by+c=0$, једначина круга у равни је $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Пресек две праве је решење система

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0, \end{aligned}$$

пресек праве и круга – система

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2&=r^2 \end{aligned}$$

а два круга – система

$$\begin{aligned} (x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2&=r_1^2\\ (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2&=r_2^2. \end{aligned}$$

Уз мало елементарне алгебре и погодан избор Декартовог координатног система у равни (за x-осу узмимо дату праву, за координатни почетак тачку на њој или центар датог круга), лако се уверавамо да се решења оваквих система добијају од рационалних коефицијената вишеструком применом операција сабирања, одузимања, множења и дељења уз операцију кореновања (налажења квадратног корена). Такви бројеви се називају квадратним ирационалностима. Дакле, сваки конструктибилан број је квадратна ирационалност. Може се лако доказати да важи и обратно: свака квадратна ирационалност се може конструисати лењиром и шестаром. Са становишта алгебарске теорије поља, квадратне ирационалности се карактеришу као елементи уније свих вишеструких квадратних раширења поља $\mathbb{Q}$, тј. међупôља K_n, $\mathbb{Q}\subset K_n\subset\mathbb{C}$, таквих да је $[K_n:\mathbb{Q}]=2^n$ за све $n\in\mathbb{N}_0$. Значи, лењиром и шестаром се могу конструисати оне и само оне дужи чија се дужина изражава квадратним ирационалним изразом, тј. елементом таквог поља $K=\bigcup K_n$[4].

[3] А изостаља се! Постоје квазиметодичка упутства против употребе шестара који је, наводно, „опасан у школи“ због игле на врху.

[4] Овакав објекат се у вишој алгебри назива *директни лимес*.

Значај конструкција за старогрчку математику одражава и чињеница да је најстарији конструктивни проблем наведен у првој књизи Еуклидових „Елемената“ као њена прва теорема: конструкција једнакостраничног троугла задате странице.

Осим правих и кругова, стари Грци су знали и за друге конусне пресеке различите од круга – криве у пресеку равни и правог кружног конуса, елипсу, хиперболу и параболу, и користили их такође у решавању неких од класичних античких проблема. Таква се решења не сматрају конструкцијама у наведеном смислу.

Три чувена математичка проблема бејаху постављена у Старом веку: квадратура круга, удвостручење коцке и трисекција угла, и њихов се одјек чује до данашњих дана. Суштински су допринели развоју математике, посебно решавању алгебарских једначина, појму конструктибилног броја или квадратне ирационалности и појму раширења поља.

1. Квадратура круга

Овај проблем је најстарији и састоји се у налажењу конструкције квадрата који има исту површину као задати круг. Проблем се своди на конструкцију броја π помоћу лењира и шестара.

У савременом алгебарском излагању, тражи се конструкција странице x квадрата[5] чија је површина $S = x^2$ једнака површини круга $S = \pi r^2$ са датим полупречником r. Ако узмемо да је $r = 1$, добијамо квадратну једначину

$$x^2 - \pi = 0$$

са трансцендентним коефицијентом π која има позитивно решење $x = \sqrt{\pi}$. Проблем се своди на конструкцију овог реалног броја. На основу Талесове теореме се лако види да се $\sqrt{\pi}$ може конструисати ако и само ако се може конструисати π.

Проблем потиче још из XVI века пре Христа и помиње се у једном од два најзначајнија математичка писана документа староегипатске цивилизације, Ахмесовом папирусу[6], где је као (приближно) решење дата вредност $x = \frac{16}{9}$. Заиста, $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16$, што даје малу релативну грешку од $0,6\%$ у односу на тачно решење. У Старој Грчкој квадратуром круга се први бавио Анаксагора из Клазомене код Смирне[7] у V веку пре Христа, учитељ Периклов и оснивач атинске философске школе.

[5] Аутор сматра да не треба посебном терминологијом разликовати дужи и њихове дужине, осим у ретким случајевима када се то не види из контекста и може довести до забуне. Ово је, нажалост, последњих деценија промењено у српској школској литератури. Да ли је реч о дужи или њеној дужини, дакле броју, скоро се увек види из контекста. Терминолошко разликовање доводи до преоптерећивања текста школских задатака и губитка јасноће и прегледности.

[6] Ахмесов или Рајндов (*Alexander Henry Rhind*, 1833–1863) папирус (око 1550. пре Христа), откривен 1858. године у рушевинама храма у Луксору у Египту, налази се у Британском музеју у Лондону. Други документ је Московски папирус или папирус Голенишчева (око 1850. пре Христа), налази се у Музеју А. С. Пушкина у Москви.

[7] Данас је то *Kilizman* код Измира у Турској. Од античке Клазомене није остало ништа.

Проблем је коначно решен одречно тек 1882. године када је Линдеман[8] доказао трансцендентност броја π. Прецизније, доказао је овакву општију теорему: ако је α алгебарски број, онда је e^{α} трансцендентан. Одатле добијамо да је π трансцендентан, јер ако би π био алгебарски, онда би такав био и πi, па би $e^{\pi i} = -1$ био трансцендентан. Следи немогућност конструкције решења квадратуре круга лењиром и шестаром, јер конструктибилни бројеви морају бити квадратне ирационалности па су свакако алгебарски, док π то није.

2. Удвостручење коцке

Други проблем, познат и под именом Делски проблем, потиче из V века пре Христа од Хипократа са Ија (Хиоса)[9] и састоји се у конструкцији коцке која има два пута већу запремину од дате коцке. За њега је везана легенда која каже да је Аполо, незадовољан величином коцкастог каменог олтара у новом, њему посвећеном храму на острву Делу (Делосу)[10], послао на острво кугу са поруком да ће трајати све док се не постави два пута већи олтар. Мештани су на камену коцку поставили још једну исту такву, али куга није престала. Преко пророчишта у Делфима, Аполо је захтевао да олтар буде двапут већи али истог облика.

Савремени запис овог проблема нам даје запремину нове коцке ивице x као $x^3 = 2a^3$ при чему је a ивица дате коцке. Ово је једначина чије решење тражимо. Ако сматрамо да је ивице полазне коцке $a = 1$, проблем се своди на конструкцију решења кубне једначине

$$x^3 - 2 = 0,$$

тј. позитивног реалног броја $x = \sqrt[3]{2}$.

Први антички Грк који је започео теорију конусних пресека Менехмо[11], ученик и пријатељ Платонов, нашао је у IV веку пре Христа решење Делског проблема у пресеку две параболе чије осе граде прав угао. Данас бисмо то записали једначинама $2x = y^2$ и $y = x^2$. Међутим, парабола се не може конструисати лењиром и шестаром (мада појединa тачка (x, y) параболе може ако је x конструктибилан број, рецимо рационалан), па се ни пресек две параболе не може конструисати. Зато ово није решење конструктивног проблема удвостручења коцке. Конструктивни проблем нема решење јер број $\sqrt[3]{2}$ није квадратна ирационалност.

3. Трисекција угла

Трећи проблем је из IV века пре Христа и приписује се Архити из Тарента[12]. Састоји се у конструкцији угла који је једнак трећини датог угла. За неке

[8] *Ferdinand von Lindemann* (1852–1939), немачки математичар.

[9] Острво у Егејском мору близу малоазијске обале. Аутор предлаже да се у српском језику увек користе грчка лична и географска имена без наставка „-ос“ или „-ес“ (Ахил, Иј, Дел и слично).

[10] Острво у Егејском мору у групи Киклада, митско место рођења близанаца Апола и Артемиде.

[11] 380. (Алопеконес или Проконес, данашња европска Турска) – 320. (Кизик, данашња азијска Турска) пре Христа. Његов брат је био Динострат (390–320. пре Христа) који је познат по квадратриси, кривој помоћу које се може извршити квадратура круга.

[12] 428. (Тарент, данашњи *Taranto* у јужној Италији) – 347. пре Христа, Питагорејац, ученик Филолајев, пријатељ Платонов, учитељ Менехмов.

конкретне вредности угла ово је могуће урадити. Тако, прав угао можемо поделити на три једнака дела и конструисати угао од 30°, што се данас учи у основној школи. Међутим, овде се тражи опште решење проблема.

Тригонометријска интерпретација овог проблема је следећа. Ако је позната дуж $a = \cos 3\alpha$ ($0 \leqslant 3\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $0 \leqslant a \leqslant 1$) коју на јединичном кругу одређује дати угао 3α, треба конструисати дуж $x = \cos\alpha$ која на јединичном кругу одређује трећину α датог угла 3α. У алгебарској интерпретацији и овај проблем се своди на конструкцију решења кубне једначине, нешто сложеније него претходне. Тригонометријске адиционе формуле које се уче у средњој школи, после извесног рачунања дају $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. При томе $\cos 3\alpha$ је дата дуж, а $\cos\alpha$ се тражи. Ако је $x = \cos\alpha$ непозната, проблем се своди на конструкцију јединог позитивног решења кубне једначине[13]

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0.$$

Наравно, за неке конкретне вредности угла то је могуће. Рецимо, када је $3\alpha = 0$ биће $a = 1$ и $x = 1$ (друга два решења чини двоструко $x = -\frac{1}{2}$), док је за $3\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $a = 0$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (друга два решења су 0 и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$). Проблем је да се нађе конструкција која би била тачна за било коју вредност a. Рецимо, за угао $3\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $a = \frac{1}{2}$ и једначина постаје $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$. Њена решења су:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \approx 0{,}93969, \\ x_1 &= -\frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}i\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \approx -0{,}17365, \\ x_2 &= -\frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}i\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \approx -0{,}76604, \end{aligned}$$

где је

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}, \quad \frac{1}{\lambda} = \overline{\lambda},$$

и подразумева се комплексна вредност кубног корена са најмањим аргументом. Једино позитивно решење је $x_0 \approx 0{,}93969$ и то је приближна вредност $\cos 20^\circ$. Тачна конструкција (лењиром и шестаром) броја x_0 није могућа јер он није квадратна ирационалност.

Нађимо решење једначине трисекције угла у општем случају, користећи Карданову формулу и комплексне бројеве. За произвољни угао α решавамо једначину $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0$ где је $a = \cos 3\alpha$. Довољно је да поделимо на три једнака дела угао из првог квадранта ($0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant a \leqslant 1$) зато што ћемо онда умети да поделимо на три једнака дела било који угао $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ јер угао $\frac{\pi}{2}$ умемо да поделимо. Због ограничења за угао α биће $0 \leqslant a \leqslant 1$. Функција $y = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4}$

[13] Да је једино, следи на основу Декартовог правила знакова. Друга два решења су непозитивна, што се може утврдити цртањем графика функције.

има извод $y' = 3x^2 - \frac{3}{4}$ чије нуле $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ су тачке максимума ($x_1 = -\frac{1}{2}$) и минимума ($x_2 = \frac{1}{2}$) ове функције, вредности максимума и минимума у тим тачкама су $\frac{1-a}{4} \geqslant 0$ и $-\frac{a+1}{4} < 0$ а превојна тачка је тачка са координатама $x = 0$, $y = -\frac{a}{4} \leqslant 0$. То значи да имамо два негативна (тачније, два непозитивна) и само један позитиван корен $x_0 \geqslant \frac{1}{2}$. Случај $a = 1$ је размотрен малопре, а у случају $a = 0$ корени су $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$. Оба ова случаја нас не интересују. Вредност $x = \cos\alpha$ је увек већа од $\frac{1}{2}$. Треба наћи x_0. Користећи Карданову формулу добијамо израз за сва три корена у облику

$$x_{0,1,2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a + i\sqrt{1-a^2}} + \sqrt[3]{a - i\sqrt{1-a^2}}\right)$$

уз одговарајућу комбинацију вредности примитивног трећег корена из јединице $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Тригонометријски начин налажења трећег корена би нас поново довео до броја $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ што желимо да избегнемо јер нам је циљ да решење нађемо у облику ирационалног израза по a. Ово је тзв. *casus irreducibilis* код кога је вредност дискриминанте кубне једначине $a^2 - 1$ негативна па је $\sqrt{a^2-1} = i\sqrt{1-a^2}$ чисто имагинаран и не може се избећи рачунање са комплексним бројевима, а сва три корена су реална. Тај случај је правио највише проблема алгебристима у XVI веку[14]. Могли бисмо алгебарски написати све три комплексне вредности кубног корена уз помоћ ε и $\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}$ и добили бисмо алгебарски ирационални израз који садржи квадратне и кубне корене од рационалних израза са a и комплексним бројевима. За скоро све вредности a (на пример, за $a = \frac{1}{2}$), одговарајући позитивни корен x_0 није квадратна ирационалност, док за поједине (на пример, за $a = 0$ или 1) јесте.

Конструктивна решења проблемâ удвостручења коцке и трисекције угла су дакле, као и решење проблема квадратуре круга, немогућа, што данас, математички тачно, знамо захваљујући француском математичару Пјеру Ванцелу[15] који је то доказао 1837. године. Занимљиво је да је и поменути *casus irreducibilis* потпуно разјаснио Ванцел.

Свакако, све три поменуте једначине допуштају приближна решења са било којом унапред задатом тачношћу. Тако је на 20 децимала приближно

$$\sqrt{\pi} \approx 1{,}77245385090551602730, \quad \text{a} \quad \sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992104989487316477,$$

па ипак ни једна ни друга вредност нису тачне у строгом математичком смислу, иако се у примењеној науци и техници оволика прецизност нигде не користи и она и није од значаја за примене.

[14]Пошто је Кардано умео да реши *casus irreducibilis* у неким конкретним примерима, постоји мишљење да је он умео оперативно да ради са комплексним бројевима много пре него што су они заиста ушли у математику као бројеви.

[15]*Pierre Laurent Wantzel* (1814–1848)

4. „Квадратуристи“

Зашто људи, ево већ скоро два века после коначног негативног решења сва три ова проблема, добијеног строгим математичким доказима немогућности конструкције одговарајућих бројева (а не њиховог израчунавања са било којом тачношћу), покушавају да нађу непостојеће конструкције? Одговор на то питање је у ствари врло једноставан: није проблем у људима, већ у образовном систему. Сви су они учили математику у извесној мери, али нису схватили бар једну од две ствари, а највероватније ни обе: шта значи „конструкција лењиром и шестаром“ и шта значи „математички доказ“. Правилно разумевање обеју ових одредницâ је задатак школске математике, а недостатак разумевања значи да наставници математике нису добро обавили посао. Чак и чланак о томе на српској Википедији који су писали наши математичари садржи нетачност[16].

Пре неколико година је једна агенцијска вест узбуркала неупућене духове српских читалаца: српски математичар је „доказао квадратуру круга“. У агенцијској вести он каже: „извео сам формуле за површину квадрата и површину круга које су подударне у три прве децимале, али је апсолутна грешка мања од пет десетохиљадитих. Увео сам параметар и дошао до везе између странице квадрата и полупречника круга. На основу тих релација, површина квадрата може да се претвори у површину круга и обрнуто“. Већ из овог текста се види шта је он урадио, јер помиње апсолутну грешку. Нажалост, неразумевање античких проблема у њиховој изворној поставци је било увек карактеристично за „квадратуристе“, како од миља математичари зову оне који и даље решавају већ давно (одречно) решене античке проблеме.

Наравно, проблем није у томе да је неко са својих 75 година помислио да је решио античке задатке. У овакве замке су упадали и славни математичари као што је Атија (*Sir Michael Atiyah*, 1929–2019), који је у својој деведесетој помислио да је у два реда решио Риманову хипотезу[17]. Можда ће и писац ових редова, ако поживи још двадесетак година, помислити да је нашао „изгубљени“ елементарни доказ Велике Фермаове теореме, који се тражи од 1637, ево већ скоро 400 година. У ствари, има више проблема и поређаћу их по растућој тежини.

1) Светске и локалне новинске агенције објављују нападне новинске вести а да при томе немају ни елементарна знања из области вести, нити се труде да та знања добију од компетентних стручњака који су им надохват руке (факултети, академије наука). Они своју одлуку о објављивању доносе на основу свог незнања и опскурних вести из иностранства. Новинари, укључујући и главне уреднике, постали су драматично необразовани у општем смислу ове речи.

2) Мали, локални научни часописи, да би преживели у времену диктатуре SCI индекса и импакт фактора и обезбедили финансирање од стране оних тела

[16] sr.wikipedia.org/wiki/Konstrukcije_lenjirom_i_sestarom
Реченица „За илустрацију строгости нека послужи да није дозвољено шестаром узети растојање између две тачке па потом пренети то растојање на неку дуж“ погрешна је, у контрадикцији је са трећим постулатом – како на други начин нацртати круг са датим полупречником?

[17] blogs.ams.org/blogonmathblogs/2018/10/01/on-michael-atiyah-and-the-riemann-hypothesis/

која их силом прилика финансирају, објављују непроверене и слабо рецензиране чланке. При томе у раду њихових редакција често учествују еминентни локални стручњаци који се уопште не удубљују у свој део посла.

3) И најважније: у постмодерном, глобалистичком потрошачком свету се девалвира научни рад. Појављују се опскурни часописи и конференције у којима се објављује и на којима се излаже онда када се уплати одређени новац, а да при томе нема одговарајуће стручнонаучне рецензије пријављених резултата. У организационим и редакцијским одборима су стручњаци који од тог посла живе. Број таквих чланака и конференција је јако порастао, јер постоји огроман притисак за објављивање (изражен слоганом "publish or perish", тј. објављуј или нестани) који научни радници трпе пре свега због пројектног начина финансирања њиховог рада. Лавина ове квази- и паранауке већ постепено гуши праву науку, која се не може мерити коефицијентима и импакт факторима.

Остаје нам да стално инсистирамо на квалитету школског математичког образовања, надајући се да људска цивилизација неће завршити у мрачним визијама писаца фантастике после Другог светског рата, Реја Бредберија („Фаренхајт 451") и Џорџа Орвела („1984").

Математички факултет, Београд
E-mail: `aleksandar.lipkovski@matf.bg.ac.rs`