

Др Александар Липковски

О ЗНАЧАЈУ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Године 1981. државни секретар за образовање Сједињених Америчких Држава Терел Бел је после многобројних упозоравајућих извештаја о лошем стању јавног образовања успео да убеди председника Роналда Регана да оснује Комисију за извршност образовања која је требало да испита стање у америчком систему јавног образовања. Наиме, седамдесетих година двадесетог века је примећено да јавно образовање недовољно добро припрема ђаке из математике и природних наука. Млади имигранти, Кинези и Кореанци, лакше су се уписивали на факултете и боље напредовали у стицању универзитетских знања од Американаца који су претходне школе завршили у Америци. То је видео и амерички хемичар Глен Сиборг¹, добитник Нобелове награде за хемију 1951, који је осим свог научног ангажмана и учешћа у пројекту стварања америчке атомске бомбе „Manhattan“, или можда управо због тога, деценијама био велики борац за побољшање наставе математике и природних наука у јавним школама САД. Као дугогодишњи професор чувеног Калифорнијског универзитета у Берклију, Сиборг је дошао до поражавајуће констатације да 95% америчких матураната не уме да сабере $1/2$ и $1/3$ или да подели 111 са 3 без калкулатора. Сиборг је постао један од кључних чланова те Комисије која је две године анализирао стање образовања у америчким државним школама. Извештај Комисије је објављен 1983. год. под насловом „Нација у опасности“². У свом закључку извештај поручује:

„Наша нација је у опасности. Наше некад неприкосновено вођство у економији, индустрији, науци и технолошким иновацијама преузимају супарници широм света ... Образовне основе нашег друштва пропадају под притиском плиме медиокритетства која прети да уништи нашу будућност као нације и народа. Оно што је било незамисливо само пре једне генерације, почело је да се догађа: други достижу и превазилазе наша образовна постигнућа. Ако би непријатељска страна сила покушала да Америци наметне медиокритетска образовна постигнућа која видимо данас, могли бисмо то да посматрамо као објаву рата. Како се чини, ми

¹Glenn Theodore Seaborg, 1912, Ishpeming, Michigan – 1999, Lafayette, California

²A nation at risk: The imperative for educational reform. A Report to the Nation and the Secretary of Education, United States Department of Education, by The National Commission on Excellence in Education, April 1983

смо то у ствари сами дозволили. Фактички, лакомислено смо извршили једнострано образовно разорување.“

Закључак је заиста тачан: пропаст или напредак нације зависи од школе, а у школи највише зависи од математичких и природнонаучних знања. У то смо се уверили и током сопственог живота. Кризи авнојевске Југославије, сецесији и грађанском рату 1991–1995. год. претходила је деградација школског система – сетимо се усмереног школовања и „шуварица“. Данашњој кризи идентитета српског народа у великој мери претходи криза образовања проузрокована „Пепси“³ реформама од 2000. године наовамо. Подржавање медиокритетства промовисано образовним стандардима који укидају селекциони приступ образовању даје веома лоше ефекте.

Један други Американац, математичар Леон Зајтелман⁴ је године 1996. у часопису Америчког математичког друштва формулисао закључке у вези са наставом математике, којих се можемо држати и данас и овде.

„– Математика је кључна за националне интересе. Снажне математичке способности у националним оквирима су од суштинског значаја за индустријско и технолошко вођство.

– Математика је камен темељац за остале дисциплине. Практично сва технологија зависи директно од напретка математичког знања.

– Математичке компетенције су неопходне за било какав рад. Захтеви за математичке компетенције ће се драматично повећавати за сва занимања у информатичком добу.“

Имао сам прилику да се у чињенице које описује Сиборг уверим лично. У тешким временима грађанског рата у Југославији неколико година сам држао наставу математике у приватној средњој школи на енглеском језику. Имао сам више америчких ђака, од којих је један управо тада дошао из јавне средње школе у САД. Прегледајући његове домаће задатке схватио сам колико је његово знање математике испод нивоа чак и наших слабих ђака. Погледајте и сами (в. слику). Показивао сам ту слику на предавањима која сам држао на семинарима за наставнике хвалећи наш образовни систем и надајући се да до таквог нивоа незнања ипак нећемо доћи. Авај, црне слутње су се данас, четврт века касније, нажалост обистиниле. Данашњи наставници знају о чему је реч: о веома ниском претходном знању ђака и о немогућности да се на то васпитно-педагошким мерама утиче.

³Термин је скovan 2003. године на семинару Друштва математичара Србије и означава специфичан педагошко-психолошки приступ образовању либерално-глобалистичког едукационистичког лобија, веома активног и данас, поред осталог и у наметању образовања на даљину.

⁴Leon Seitelman, математичар, популаризатор и промотер квалитетне наставе математике, професор више универзитета и креатор математичких такмичења у САД у организацији SIAM-а. Цитат: „– Mathematics is vital to the national interest. Strong mathematical capability on a national scale is essential for industrial and technological leadership.

– Mathematics is an enabler for other disciplines. Virtually all other technology benefits directly from the extension of mathematical knowledge.

– Mathematical competence is a workplace necessity. Mathematical requirements will increase dramatically for occupations in the information age.“
је из чланка „A New Paradigm for Mathematics: Publicity or Perish“, Notices of the AMS, 43:10 (1996), 1155–1158.

11. Construct a line through P that is \parallel to ℓ .



12. Find the value of k so that the slope of line \overleftrightarrow{PQ} is -3 , given $P(2, -k)$ and $Q(-3, 4)$.

$$\frac{-3}{1} = \frac{-k - 4}{2 - (-3)} = \frac{-k - 4}{5}$$

$$\frac{-3}{1} = \frac{-k - 4}{5}$$

$$-3 \cdot 5 = -k - 4$$

$$-15 = -k - 4$$

$$-15 + 4 = -k$$

$$-11 = -k$$

$$k = 11$$

Слушкиња и краљица науке

Размотримо разлоге за интензивно учење математике у школи. Пре свега, математика се суштински користи у свим природним и техничким наукама. Овај разлог – применљивост математике – помиње се најчешће. Још од доба Коперника, Галилеја и Њутна фундаментални и нови математички концепти настајали су и развијали се с једне стране као средство за напредак природних наука, док са друге стране, свака природна наука у свом развоју интензивно користи већ постојеће математичке методе. Најбољи пример за то је општа теорија релативности у којој је Ајнштајн употребио већ постојећу теорију диференцијалне геометрије. Речима немачког филозофа Канта, у свакој природној науци може бити само онолико праве науке колико у њој има математике.⁵

Интеракција математике и природних наука се у школској настави најбоље види у настави физике, почев од 7. разреда основне школе, мада се и пре тога математички концепти размере и пропорције, а и неки други, јављају већ у 5. разреду у физичкој географији. У нашој школи се ова веза недовољно користи. Ево неких примера из праксе. У исто време када у математици почиње приближно рачунање са реалним бројевима, у физици се учи равномерно и равномерно убрзано кретање. И тамо и овде недостаје кратка прича о заокругљивању реалних бројева. У физици се резултати рачунају на две децимале, а за убрзање Земљине теже се узима да је $g = 10 \text{ m/s}^2$. Апсурдно, зар не? Касније, у физици се уче векторске величине отприлике онда када у математици логика и скупови. При томе се говори да су вектори једнаки ако имају једнаке интензитете, паралелне правце

⁵ „Ich behauptete aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist“, Immanuel Kant (1724–1804), у књизи Werke, Insel Verlag, Frankfurt am Mein, 1964, књ. IV: Mathematische Anfangsgrnde der Naturwissenschaft, str. 470.

и исти смер. У исто време се у математици помињу релације еквиваленције. Зар то не би требало и могло да се повеже?

Како је то на више места писао Галилеј⁶, „математика је језик којим је Господ описао Васељену“, односно „природни закони су формулисани математичким језиком“⁷. Многобројни су примери применљивости математике. Појам извода настао је у физици управо у Њутновој „Principia“. О применљивости математике са одушевљењем су говорили многи природњаци. Феликс Ауербах, професор физике на Универзитету у Јени објавио је књигу посвећену страху од математике као школског предмета⁸, у којој је главни аргумент у корист математике њена применљивост. Један веома значајан научник и (опет!) учесник пројекта „Manhattan“, физичар нобеловац Јудин Вигнер је објавио чланак о необјашњивој ефективности математике⁹. Ево Вигнеровог мишљења: „Математички језик је изузетно добар за формулисање физичких закона. То је скупочени поклон који не разумемо и не заслужујемо. Захвални смо што га имамо и надамо се да ћемо га и убудуће користити. Његова применљивост ће и даље расти, доносећи нам не само радост већ и главобољу.“

Зидање зграде

Имајући у виду применљивост математике, често се заборавља да математику треба учити и због њеног даљег унутрашњег развоја у каснијем школовању. Математичка зграда се зида од темеља према крову и ако темељи нису добри, грађевина може изгледати ружно или се срушити. У најтежим случајевима се не може ни изградити. Наведимо два примера.

У млађим разредима основне школе уче се основне особине аритметичких операција са бројевима – комутативност, асоцијативност и дистрибутивност или, како се то лепше каже, замена места, здруживање и расподељивање. Ове особине се показују на тривијалним примерима и уче напамет, без разумевања њиховог суштинског места у аритметици основне школе. Следећу анегдоту која то илуструје испричао је чувени руски математичар Арнолд¹⁰ који је дуго боравио и радио у Француској. У основну школу у Паризу долази министар просвете и пита децу колико је два плус три. Спремно се јавља најбољи ученик

⁶Galileo Galilei (1564–1642)

⁷У књизи Мориса Клајна „Mathematical thought from ancient to modern times“, Oxford Univ. Press 1972. Познати математичар Morris Kline (1908–1992) бавио се и наставом математике. Позната је његова књига у којој критикује логичко-скуповну реформу наставе математике „Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Mathematics“, St. Martin's Press, 1973.

⁸Felix Auerbach (1856–1933), „Die Furcht vor der Mathematik und ihre Überwindung“, Gustav Fischer Verlag, 1924, српски превод „Страх од математике и како да га савладамо“, изд. МД Архимедес 2019.

⁹Eugene Wigner (1902–1995), „The unreasonable effectiveness in mathematics“, Comm. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 1–14. „The language of mathematics is exceptionally applicable in formulation of physical laws. It is a precious gift, which we do not understand and do not deserve. We are thankful for having it and we hope that we shall continue to use it in future research. Its applicability will grow, bringing us not only joy but also headache.“

¹⁰Владимир Игоревич Арнолд (1937–2010). Чланак Владимира Гунарева «Академик В. И. Арнолд: Путешествие в хаосе». Наука и жизнь, 12, 2000 (www.nkj.ru/archive/articles/5174/).

и као из топа одговара: два плус три једнако је три плус два због комутативности сабирања! У млађим разредима основне школе се недовољно инсистира на суштинском коришћењу ових особина ради олакшавања рачуна, на пример $98 \cdot 13 = (100 - 2) \cdot 13 = 1300 - 26 = 1274$, што се може израчунати напамет. Управо овакво коришћење развија код ђака способност препознавања правилности израза која ће им у старијим разредима бити веома потребна, рецимо код израчунавања вредности сложених аритметичких израза са разломцима у петом разреду.

Још један пример даје таблица множења. Под притиском педагошко-психолошких упутстава да деца не треба да уче напамет, учитељи и родитељи у последње време недовољно инсистирају на табели множења, сматрајући ваљда да за то постоји калкулатор. Колико је то погрешно види се већ у петом разреду основне школе кад треба растављати бројеве на просте чиниоце, налазити највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац или сабирати разломке. А без тога, наћи ћемо се на почетку наше приче, код америчких матураната.

Гимнастика ума

Када би применљивост математике била њена једина особина, већ би и то било довољно. Наравно, ако бисмо се руководили искључиво аргументом применљивости, онда би апсолутној већини популације – оној која нема контакта са техничко-инжењерским применама – било довољно познавање Питагорине теореме на нивоу 7. разреда основне школе. То је један од главних аргумената заговорника прагматичне теорије „учи само оно што ће ти у животу бити потребно“. Међутим, права математика је много више од пуког алата за природне науке. Чувени руски ерудита и научник, оснивач Московског државног универзитета, Михаил Ломоносов је језгровито окарактерисао ову фундаменталну особину математике, рекавши да математику треба учити већ и због тога што ум доводи у ред¹¹. И као што се телесна снага развија телесним вежбањем, тако се и мисаона снага – интелект – развија такође вежбањем у математици. Ова особина учења математике запажена је још у античким временима. Грчки философ Платон пише: „Ниједан предмет науке не садржи у себи толику вредност као вежбање у рачунању, ни за домаћинства, ни за државничке послове. А што је најважније, оно дремљивца и човека по природи необразованог буди и улива му лакоћу схватања, памћење и бистрину; и тако он, упркос својој слабијој природној надарености, може напредовати, јер му у томе помаже ово божанско знање и вештина.“¹²

Човек који је у школи добро научио математику боље мисли, брже закључује, критички сагледава ствари око себе, разликује лаж од истине. Можда је управо та особина математике довела до тежње просветних власти за њеним запостављањем у школама? Политичарима, припадницима „више класе“ данашњег друштва, нису

¹¹ „Математику уже затем учить, что она ум в порядок приводит“, Михаил Васильевич Ломоносов (1711–1765).

¹² Платон, Закони, Књига V, 747Б.

потребни „плебејци“ који мисле и закључују, који постављају сувишна питања и изводе закључке. Управо такву, критичку интелигенцију развија бављење математиком.

Лепота

Све до сада набројано не исцрпљује све важне разлоге за учење математике. Задржимо се на крају на развоју естетске и креативне компоненте личности Ђака. Велики руски песник Пушкин је једном приликом рекао: „Надахнуће је неопходно у геометрији, исто као у поезији“¹³. Ђак који никад није имао то надахнуће, који није осетио естетско задовољство лепо урађеног задатка није добро научио математику. Исто тако, већ урађен задатак може се често урадити на лепши, краћи, бољи начин. Многи докази у геометрији плене својом лепотом. Једноставни геометријски докази Питагорине теореме засновани на разложивој и допунској једнакости геометријских фигура могу се лако запамтити као лепо орнаменти. Задатак наставника је да унутрашњу лепоту математике приказује од самог почетка у многобројним различитим приликама, чиме ће Ђацима приближити ову естетску компоненту математике, олакшати њено даље учење и развити специфичан осећај за лепо.

Највеће математичко достигнуће двадесетог века је несумњиво Вајлсов и Тејлоров доказ Велике Фермаове теореме. Овај доказ, објављен у два рада на 127 страна, користи веома сложене математичке појмове и конструкције да би доказао Вејл-Танијама-Шимурину хипотезу, из које је Фермаова теорема следила претходним напорима многих математичара. Па ипак, естете међу математичарима не могу бити задовољни: тврђење које се формулише на једноставном језику природних бројева доказано је тешком математичком артиљеријом: пуцамо из топа на врапце. Не можемо се отети утиску да ће, једног дана, бити нађен и једноставнији доказ Велике Фермаове теореме.

На крају

Покушао сам да прикажем основне разлоге због којих треба учити математику. Да би било стабилно, основно образовање треба да почива на три стуба. Који су то стубови? Развој социјалне компоненте личности одвија се и напредује пре свега кроз матерњи језик и књижевност. О развоју телесне спремности Ђака стара се гимнастика и спорт. А интелектуални развој Ђака се постиже највише кроз наставу математике. Ова три стуба морају чинити основу сваког квалитетног образовања. И ако се бављење гимнастиком и спортом добрим својим делом обавља и изван школе, два предмета – српски језик и математика – морају бити присутни у школским часовима сваког радног дана. Дакле, пет часова математике и српског недељно у школи за све!

Математички факултет, Београд

E-mail: acal@matf.bg.ac.rs

¹³ „Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии“, Александр Сергеевич Пушкин (1799–1837). Фраза је из Пушкинових необјављених белешки „Возражение на статьи Кюшельбекера в „Мнемозине““ око 1825–1827.