Александра Равас

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУС И ФОРМУЛА ЗА ЗБИР ПРВИХ n ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА[1]

Die weitere Fortbildung und Entwicklung der systematischen Arithmetik knüpft, wie fast alles, was die Mathematik unseres Jahrhunderts an eigenen wissenschaftlichen Ideen gezeitigt hat, an Gauss an.[2]

Leopold Kroneker

Вероватно су ретки они који нису чули анегдоту из Гаусове младости: једног дана учитељ је тражио од својих ђака да саберу низ бројева. Убрзо након што је задатак био постављен, Гаус је саопштио резултат за који се испоставило да јесте тачан. Како је дошао до њега? Како је тачно гласио задатак, да ли је требало сабрати првих 100 природних бројева или неких других 100 (или мање? или више?) узастопних бројева како наводе поједини извори? Да ли је Гаус, у то време основац, самостално дошао до формуле на часу, или му је она можда била позната од раније?

Један (не)обичан живот

Карл Фридрих Гаус рођен је 30. априла 1777. године у источном делу центра града Брауншвајга, у скромној кући[3] која је у то време имала адресу *Am Vendengraben*[4], док би се, да постоји, данас налазила на адреси улица Вилхелм, број 30.

Гаусов отац, Гебхард Дидрих Гаус, рођен је 1744. године у Брауншвајгу. Стекао је звање мајстора за фонтане, али је у животу радио различите послове који су му донели пристојну зараду: био је помоћник једном трговцу на сајмовима у Брауншвајгу и Лајпцигу, а како је умео да пише и рачуна, водио је књиге за једно велико осигуравајуће друштво. Последњих 15 година живота бавио се

[1]Излагање са 14. Српског математичког конгреса (СМАК), одржаног од 16. до 19. маја 2018. године на ПМФ у Крагујевцу

[2]„Даљи напредак и развој систематичне аритметике, као и скоро све што је математика нашег века показала својим научним идејама, заснива се на Гаусу." Из дела: *Vorlesungen Über Zahlentheorie: Erster Band: Erste bis Dreiunddreissigste Vorlesung* (1901).

[3]Полудрвену кућу је 1927. године купио град Брауншвајг да би, две године касније, у њој био отворен мали музеј посвећен Гаусу. Зграда је потпуно уништена током II светског рата, а нешто мало сачуваних експоната данас се налази у општинском музеју и градској архиви Брауншвајга.

[4]Кућа је носила број осигурања 1550.

само баштованством. Женио се два пута. Из првог брака имао је сина Јохана Георга Хајнриха рођеног 24. јануара 1769. године. Георг, Гаусов брат по оцу, рано је напустио родни дом како би изучио занат, вративши се коначно у Брауншвајг 1794. године због озбиљног проблема с оком који га је натерао да напусти занат. Пошто отац није толерисао нераднике, а син је био превише стар да би учио нови занат, Георг је постао војник, помажући оцу у слободно време. Војну службу напустио је 1806, да би две године касније, по смрти оца, постао управник осигуравајућег друштва, и на тој је позицији остао све до своје смрти, 7. августа 1854. године.

Гаусова мајка Доротеа Бенце, рођена је 18. јуна 1743. године у селу Фелпке удаљеном 35 km од Брауншвајга, док је њен брат Јохан Фридрих рођен пет година касније. Фридрих је научио да тка и врло брзо је, захваљујући свом проницљивом уму, самостално почео да производи уметнички ткан дамаст. Гаус је још од раног детињства волео да проводи време са својим паметним ујаком, а како је растао, теме њихових разговора су му биле све занимљивије. Ценио је његове необичне вештине и касније жалио што му је ујак умро млад, говорећи: „С њим смо изгубили рођеног генија“.

Доселивши се у Брауншвајг 1769. године, Доротеа Бенце се удала за Гебхарда Гауса седам година касније. Природно оштрог ума, ведрог духа и јаког карактера, била је крупна жена, због катаракте потпуно слепа последње четири године свог живота. Карл Фридрих је био син јединац и водила је рачуна о њему до последњег часа. Преминула је у деведесет седмој години у гетингенској опсерваторији, где је живела са сином од своје 75. године.

Гаус је пошао у Гимназију у Брауншвајгу у узрасту од 11 година, затим је 1792. године, захваљујући стипендији војводе од Брауншвајга, уписао *Collegium Carolinum* (данас Технолошки универзитет у Брауншвајгу), да би 1795. године наставио школовање на Универзитету у Гетингену. До тренутка када је завршио студије, 1798. године, већ је за собом имао више значајних открића.

Током 1796. године Гаус је, што се може утврдити на основу дневника који је водио, показао да се правилан многоугао може конструисати уз помоћ лењира и шестара[5] онда када му је број страница производ степена броја два и произвољног броја различитих Фермаових бројева,[6] укључујући и случај када је њихов број једнак нули. Доказао је закон квадратног реципроцитета захваљујући коме је у модуларној аритметици могуће утврдити за произвољну квадратну једначину да ли она има решења; теорему о простим бројевима која објашњава на који су начин прости бројеви распоређени у скупу природних бројева; показао је да се произвољан природан број може представити као збир највише три троугаона броја. Крајем исте године објавио је основну теорему алгебре о броју корена ненула полинома једне променљиве с комплексним коефицијентима на основу које је 150 година касније Андре Вејл поставио своје хипотезе и тиме обезбедио читав низ великих открића у савременој алгебарској геометрији и теорији бројева насталих као последица покушаја доказивања тих хипотеза.

Из Гаусове преписке с краја 1797. године сазнајемо да је увелико радио на материјалу који је 1801. године уз финансијску помоћ војводе од Брауншвајга објављен као књига под називом *Disquisitiones Arithmeticae* (лат. „Аритметичка истраживања“), и који га сврстава међу најважније математичаре свих времена. Ту је Гаус на једном месту прикупио резултате до којих су у оквиру теорије бројева дошли његови претходници попут Фермаа, Ојлера, Лагранжа и Лежандра, проширујући их својим открићима. Пре овог уџбеника, теорија бројева била је само колекција изолованих теорема и хипотеза. Гаус је своја и постигнућа својих претходника систематизовао и допунио исправљајући слабе доказе, попуњавајући рупе и тиме проширујући предмет на више начина. Логичка структура књиге у којој исказ теореме прати њен доказ, а затим и њене последице постала је стандард за математичке текстове који су уследили. Многе теореме илустровао је нумеричким примерима.

Са својих 30 година Гаус је 1807. године постављен за професора астрономије на Универзитету у Гетингену и на тој је позицији остао све до краја живота. Међу студентима којима је био ментор јесу математичари Рихард Дедекинд, Бернхард Риман, Јохан Листинг[7], Кристијан Герлинг[8], Мориц Штерн и астроном Кристијан Петерс. Гаусова предавања слушали су математичари Ернст Кумер, Аугуст Мебијус и Јохан Петер Лежен Дирихле, као и физичар Густаф Кирхоф, док је Софији Жермен Гаус у неку руку био дописни ментор.

Гаус се женио два пута и имао је шесторо деце. С првом женом, Јоханом Остхоф (1780–1809) имао је два сина (Карла Јозефа и Лудвига) и ћерку Вилхелмину, а с другом, Фредериком Вилхелмином Валдек (1788–1831) такође два

[5] Ово је определило Гауса да, уместо филологије, за свој предмет интересовања одабере математику. Толико је био одушевљен тим открићем да је изразио жељу да му се на надгробном споменику уклеше правилни седмнаестоугао, што је каменорезац наводно одбио уз аргумент да се тај лик неће разликовати од кружнице. Међутим, орнамент који је тиме мотивисан ипак се налази на Гаусовом споменику у Брауншвајгу (в. [21])

[6] Прости бројеви облика $2^{2^n}+1$, при чему је n ненегативан цео број.

[7] Увео је термин „топологија“ у свом чувеном чланку из 1847. године и истовремено кад и Аугуст Мебијус открио особине површи која је данас позната као „Мебијусова трака“.

[8] Познат по својим доприносима геодезији.

сина (Еугена Петера и Вилхелма Аугуста) и ћерку Терезу.

Карл Фридрих Гаус преминуо је 23. фебруара 1855. од последица срчаног удара. Сахрањен је на гробљу Албани у југоисточном делу Гетингена.

Шта се десило у брауншвајгској учионици?

Кад говоримо о домаћим изворима чувене анегдоте, ту подразумевамо читаву територију бивше Југославије. У збирци задатака из математике ауторки Наталије Јекић и Душанке Ковачевић из 2010. године [10, стр. 9] може се наћи следећа верзија догађаја из Гаусовог детињства:

> Гаус је рано показао математичку даровитост. Позната је анегдота која каже да је једном приликом учитељ задао ученицима да саберу све бројеве од 1 до 100. На његово велико изненађење, Гаус који је тада имао седам година, одмах је донео свој резултат, а то је био број 5050. Гаус је решио задатак на начин који смо показали у претходном решеном примеру.[9]

У својој књизи из 1979. године Владимир Девиде [4, стр. 152] пише:

> Карл Фридрих Гаус (1777–1855), *“princeps mathematicorum”*, кнез математичара, један од највећих и најсвестранијих математичара свих времена, зачудио је свог учитеља надареношћу за математику већ као дјечак, када му је било само девет година.
>
> Учитељ је ђацима дао у задатак да зброје све природне бројеве од један до сто – и Гаус је одмах донио плочицу с исписаним резултатом 5050. Зачуђеном учитељу растумачио је то овако: један и сто дају сто и један, два и деведесет и девет опет сто и један, три и деведесет и осам опет сто и један итд. Таквих парова бројева има педесет. Значи, зброј првих сто бројева једнак је педесет пута по сто и један, а то је 5050.
>
> Од тога дана учитељ је младом Гаусу давао додатну подуку из математике, но ускоро је закључио да Гаус од њега нема више што научити.

У књизи о цртицама из живота славних математичара објављеној 2015. године [8, стр. 30], брачни пар Петковић наводи следећу варијанту:

> Гаус је исказао свој математички таленат још у детињству. То показује следећи догађај из доба када му је било десет година. Гаусов учитељ, господин Битнер, био је познат по задавању тешких проблема ученицима. Једног дана задао им је да израчунају збир
>
> $$81297 + 81495 + \cdots + 100899,$$
>
> који представља аритметичку прогресију од 100 чланова са међусобном разликом 198. Учитељ се надао да ће овим проблемом упослити разред цео наредни сат, јер ученици нису знали ништа о аритметичкој прогресији нити општој формули за налажење њене суме.

[9] У питању је тзв. „преклапање“ посматраног низа бројева, о чему ће бити речи касније.

> Међутим, скоро истог тренутка мали Карл је положио своју таблицу на сто. Када је запањени учитељ погледао резултат, видео је тачан одговор 9 109 800 без икакве рачунице. Десетогодишњи дечак срачунао је напамет збир тако што је прегруписао сабирке у 50 парова: (81297+100899), (81495+100701), ... , (90999+91197), при чему је збир сваког 182196, а затим множењем добио коначан резултат $182196 \cdot 50 = 9109800$. Импресиониран својим младим учеником, Битнер је одмах организовао да Гаус добија посебну подуку код његовог асистента Мартина Бартелса (1769–1836), који је и сам касније постао професор математике у Русији.

Да ли после читања ових текстова знамо шта се десило, који је збир требало израчунати и колико је година Гаус имао тада – седам, девет, десет? С обиром на карактеристичну поставку задатка, у последњем је случају лако утврдити да је текст писан под утицајем књиге „Велики математичари“ Ерика Т. Бела објављене 1937. године. За прве две варијанте немамо могућност да установимо порекло.

Примарни извор анегдоте и уједно први познати писани помен ове згоде јесте кратка књига сећања на Гауса објављена 1856. године, само годину дана након Гаусове смрти, коју је сачинио његов колега с Гетингеншког универзитета, професор минералогије и геологије, Волфганг Сарторијус фон Валтерсхаузен. У њој фон Валтерсхаузен описује време које је Гаус као дечак провео на школовању у Брауншвајгу. Текст је на енглески језик 1966. године превела Гаусова праправнука Хелен Вортингтон Гаус. Наводимо изворни немачки текст и поменути превод на енглески.

> Gauss besuchte zuerst 1784, nachdem er sein siebentes Lebensjahr zurückgelegt, die Catharinen-Volksschule, in welcher der erste Elementar-Unterricht ertheilt wurde und die damals unter der Leitung eines gewissen Bttner gestanden hat. Es war eine dumpfe, niedrige Schulstube mit einem unebenen ausge-laufenen Fusiboden, von der man nach der einen Seite gegen die beiden schlanken gothisehen Thürme der catharinen-kirche, nach der andern gegen Ställe und armselige Hintergebäude hinaus blickte. Hier ging Büttner zwischen etwa hundert Schülern auf und ab, mit der Karwatsche in der Hand, welche damals als ultima ratio seiner Erziehungsmethode von Gross und von Klein anerkannt wurde und von der er nach Laune und Bedürfniss einen schonung-slosen Gebrauch zu machen sich berechtigt fühlte. In dieser Schule, die noch sehr den Zuschnitt des Mittelalters gehabt zu haben scheint, blieb der junge Gauss zwei Jahre lang ohne durch etwas Ausser-ordentliches aufzufallen. Erst nach jener Zeit brachte es der Gang des Unterrichts mit sich, dass auch er in die Rechenklasse eintrat, in welcher die Meisten bis zu ihrer Confirmation, bis etwa zu ihrem 15 ten Jahre blieben.
>
> Es ereignete sich hier ein Umstand, den wir nicht ganz unbeachtet lassen dürfen, da er auf Gauss' späteres Leben von einigem Einfluss gewesen ist und den er uns in seinem hohen Alter mit grosser Freude und Lebhaftigkeit fter erzählt hat. Das Herkommen brachte es nämlich mit

sich, dass der Schüler, welcher zuerst sein Rechenexempel beendigt hatte, die Tafel in die Mitte eines grossen Tisches legte; über diese legte der zweite seine Tafel u.s.w. Der junge Gauss war kaum in die Rechenclasse eingetreten, als Büttner die Summation **einer arithmetischen Reihe** aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: “Ligget se” (da liegt sie). Während **die andern Schüler emsig weiter rechnen, multipliciren und addiren**, geht Büttner sich seiner Würde bewusst auf und ab, indem er nur von Zeit zu Zeit einen mitleidigen 13 und sarcastischen Blick auf den kleinsten der Schüler wirft, der längst seine Aufgabe beendigt hatte. Dieser sass dagegen ruhig, schon eben so sehr von dem festen unerschütterlichen Bewusstsein durchdrungen, welch-es ihn bis zum Ende seiner Tage bei jeder vollendeten Arbeit erfüllte, dass seine Aufgabe richtig gelöst sei, und dass das Resultat kein anderes sein könne.

Am Ende der Stunde wurden darauf die Rechentafeln umgekehrt; die von Gauss mit einer einzigen Zahl lag oben und als Büttner das Exempel prüfte, wurde das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren und alsbald mit der Karwatsche rectificirt wurden. Büttner glaubte nun ein gutes Werk zu thun eigens aus Hamburg ein neues Rechenbuch zu verschreiben, um damit den jungen bahnbrechenden Geist nach Kräften zu unterstützen, er soll aber einsichtsvoll genug gewesen sein bald zu erklären, dass Gauss in seiner Schule nichts mehr lernen könne.

*

In 1784, after his seventh birthday the little fellow entered the public school where elementary subjects were taught and which was then under a man named Büttner. It was a drab, low school-room with a worn, uneven floor. On one side one looked out on the two slender Gothic towers of the Catharinen Church, on the other side were stables and poor backyard dwellings. Here among some hundred pupils Büttner went back and forth, in his hand the switch which was then accepted by everyone as the final argument of the teacher. As occasion warranted he used it. In this school—which seems to have followed very much the pattern of the Middle Ages—the young Gauss remained two years without special incident. By that time he had reached the arithmetic class in which most boys remained up to their fifteenth year.

Here occurred an incident which he often related in old age with amusement and relish. In this class the pupil who first finished his example in arithmetic was to place his slate in the middle of a large table. On top of this the second placed his slate and so on. The young Gauss had just entered the class when Büttner gave out for a problem the adding of **a series of numbers from 1 to 100**. The problem was barely stat-

> ed before Gauss threw his slate on the table with the words (in the low Braunschweig dialect): “There it lies.” While **the other pupils continued busily adding**, Büttner, with conscious dignity, walked back and forth, occasionally throwing an ironical, pitying glance toward this the youngest of the pupils. The boy sat quietly with his task ended, as fully aware as he always was on finishing a task that the problem had been correctly solved and that there could be no other result.
>
> At the end of the hour the slates were turned bottom up. That of the young Gauss with one solitary figure lay on top. When Büttner read out the answer, to the surprise of all present that of young Gauss was found to be correct, whereas many of the others were wrong. Büttner now decided to write to Hamburg for a new book on arithmetic which would be better suited to the young lad’s exceptional mind. But before long he is said to have had enough insight to declare that Gauss could learn nothing more in his school.

Преводећи фон Валтерсхаузеново сећање на енглески, Вортингтон Гаус је направила две суштинске измене: тако је *“einer arithmetischen Reihe”* (један аритметички низ) постао *“a series of numbers from 1 to 100”* (низ бројева од 1 до 100), док је *“rechnen, multipliciren und addiren”* (пребројавали, множили и сабирали) преведено само са *“adding”* (сабирали). Намеће се питање зашто је то учинила, али одговор можемо само претпоставити. Осим тога, иако у фон Валтерсхаузеновом тексту не постоји чак ни наговештај које су бројеве сабирали Битнерови ученици, прво данас познато помињање конкретних бројева може се наћи у говору који је у априлу 1877. године одржао Ханс Зомер, директор Техничког факултета на прослави стогодишњице Гаусовог рођења у Брауншвајгу [15, стр. 176]:

> Гаус је од 1784. године похађао основну школу при цркви Свете Катарине, коју је тада водио извесни Битнер. Када је две године касније пошао на часове аритметике, деца су добила задатак да саберу низ узастопних бројева, рецимо од 1 до 40; свако ко је завршио задатак морао је оставити таблицу на столу. Након кратког времена, Гаус је написао резултат и бацио таблицу на сто уз речи „ето га“, док су остали вршили компликоване рачунице и нису завршили дуго после њега. Супротно Битнеровим очекивањима, Гаусов резултат био је у потпуности тачан. Мали генијалац одмах је приметио да 1 и 40 дају исти збир као 2 и 39, или 3 и 38, или као било која два броја подједнако удаљена од почетка и краја. Таквих парова чији је збир 41 било је 20, па је крајњи збир морао бити $20 \cdot 41$, односно 820. Деветогодишњи Гаус је на први поглед препознао и применио принцип сумирања аритметичког низа.

Како је Зомер писао две деценије после фон Валтерсхаузена, могуће је да је само записао информације које се се преносиле усмено, под условом да није допунио причу детаљима које је лично измислио како би присутнима приближио сам догађај. Прво спомињање низа бројева од 100 до 1 (!) може се наћи у краткој Гаусовој биографији коју је 1906. године објавио Франц Мате, професор с Техничког факултета у Рајхенбергу, док низ од 1 до 100 први спомиње Волтер Лицман у својој књизи забавне математике за децу и одрасле из 1918. Ауторки познато најраније (али према самом тексту, не и прво) спомињање анегдоте на нашем језику може се наћи у Гласнику југословенског професорског друштва из 1934. године где Татомир Анђелић у чланку [2] вели:

> Добро је познато како је осмогодишњи Gauss израчунао своме учитељу Büttner-у збир свих целих бројева од 1 до 60. Већ тада је он схватио принцип сабирања аритметичког реда.

У чланку [9] објављеном у часопису *American scientist* Брајан Хејз је анализирао преко сто различитих верзија ове анегдоте које је пронашао на енглеском, немачком, француском, шпанском, италијанском, румунском и португалском језику. Испоставило се да се све оне држе основне приче из фон Валтерсхаузенове књиге, али су по правилу допуњене различитим детаљима јер су аутори желели да попуне празнине, додају мотивацију за извесне поступке или да једноставно добију течну причу. Тако се често помиње да су ученици своје таблице с решењима слагали на Битнеровом столу једну на другу (да ли су заиста све могле да заврше на једној гомили или је морало бити више гомила?), док се бич или шиба које је наставник користио за кажњавање ученика често појављују у изворима до седамдесетих година XX века, да би данас у потпуности нестали.

Намећу се питања: да ли је Битнер знао за правило које даје резултат, да ли је Гаус открио правило на часу или га је знао од раније, да ли је сам дошао до њега, или га је у неком облику претходно чуо? Данас је познато да свакако није био први који је приметио правилност. У својој књизи *Liber abaci* из XIII века Леонардо Фибоначи је на почетку XII поглавља објаснио шта треба урадити ако желите да саберете неки низ бројева који се увећава за било који дати број (нпр. за један, или за два, или за три, или за било који други број). Продужимо ли дубље у прошлост, крајем VIII века, у четрдесетдругој загонетки у свом рукопису „Задаци за гимнастику ума“ Алкуин од Јорка поставља питање (у коме се можда крије задатак Гаусовог учитеља) и одмах на њега даје одговор:[10]

> Мердевине имају 100 газишта. На првом газишту стајао је један голуб, на другом два, на трећем три, на четвртом четири, на петом пет и све тако до стотог газишта. Нека каже онај ко може колико је ту укупно било голубова?

Али, и у Алкуиново време морало је бити увелико познато како сабрати n чланова аритметичког низа, јер се доказ формуле може наћи већ у XI пропозицији [1, стр. 105] у Архимедовом тексту „О спиралама“ из 225. године п.н.е! Да ли је Битнер знао за Алкуинов задатак? А Гаус? Оставимо та питања за час по страни и погледајмо оригналну[11] фон Валтерсхаузенову причу.

> Гаус је најпре 1784. године, након што је напунио седам година, похађао основну школу при цркви Свете Катарине, у којој се стицало прво

[10] који ћемо ускоро размотрити

[11] Уз помоћ превода на енглески који је 2017. године урадио Андреас Хинц, професор с Математичког института Универзитета у Минхену.

основно образовање, а која је у то време била под управом извесног Битнера. Била је то загушљива учионица с ниским плафоном и неравним, истрошеним подом, из које се с једне стране гледало на два витка готска торња цркве Свете Катарине, а с друге на штале и трошне зграде у задњем делу дворишта. У њој је Битнер ходао горе-доле између отприлике сто ученика, држећи у руци корбач, који су у то време прихватали и старији и млади као последње прибежиште његових педагошких метода и за који је сам сматрао да му је дозвољено да га немилосрдно користи у складу са својим расположењем. У тој школи која је, чини се, и даље личила на оне средњовековне, млади Гаус провео је две године без да је био примећен због било чега неуобичајеног. Концепт предавања био је такав да је тек након тог времена Гаус почео да похађа и часове аритметике које је већина ученика слушала до миропомазања, односно негде до петнаесте године.

Ту се десило нешто што се никако не сме занемарити јер је имало утицаја на Гаусов каснији живот и јер нам је то у старости често живахно препричавао с великом радошћу. Наиме, обичај је био да ученик који би први завршио своју аритметичку вежбу остави своју таблицу на средини великог стола, на њу би следећи ученик ставио своју итд. Млади Гаус тек је почео да прати наставу када је Битнер поставио задатак да се одреди збир аритметичког низа. Међутим, проблем једва да је био изречен а Гаус је већ бацио таблицу на сто, изговарајући на народном брауншвајгском дијалекту, „ето га“. Док су остали ученици ужурбано наставили да рачунају, множећи и сабирајући, Битнер свестан свог положаја шетао је горе доле, само да би с времена на време бацио сажаљив и саркастичан поглед на најситнијег међу ученицима који је свој задатак увелико завршио. Овај је, пак, седео у тишини, у потпуности прожет чврстим и постојаним убеђењем које га је до краја живота испуњавало са сваким завршеним делом, да је свој задатак тачно решио и да други резултат не може постојати. Након тога, на крају часа таблице су окренуте; Гаусова са само једним бројем била је на врху и када је Битнер проверио, на чуђење свих присутних, испоставило са да је резултат био тачан, док су многе друге имале погрешан резултат који је одмах био исправљан уз помоћ корбача. Битнер је сматрао да чини добро дело прописно наручујући нови уџбеник аритметике из Хамбурга како би снажно подржао младог генија, али сматрало се да је имао довољно слуха да убрзо изјави како Гаус у његовој школи више ништа не може да научи.

Како је Гаус израчунао резултат?

Из фон Валтерсхаузеновог сећања можемо закључити да је Гаус имао бар девет година у време које догађај описује, али као што не знамо које је тачно бројеве требало сабрати, није нам познато ни како је Гаус то учинио.

Једну могућност нуди Алкуин кроз своје решење задатка о мердевинама према коме се парови бројева групишу тако да им збир буде 100, али се на тај начин добија „вишак“ који треба додати на крају да би се дошло до збира:

> Биће их оволико: узми голуба с првог газишта и додај га групи од 99 голубова који седе на 99. газишту, добићеш 100. Уради исто с другим и 98. газиштем и такође ћеш добити 100. Комбиновањем свих газишта на овај начин, тј. једног од виших газишта с једним од нижих, увек ћеш добити 100. Педесето газиште је, међутим, само и нема свог парњака; и стото газиште нема парњака. Сабери их све и биће 5050 голубова.

				1		...		49		50		
		100		99		...		51				
S	=	100	+	100	+	...	+	100	+	50	=49*100+100+50	=5050

У цитираним примерима анегдоте из домаћих извора користи се приступ према коме се низ бројева „пресавија“ на пола чиме се у односу на полазни низ добија упола мање парова бројева с константним збиром $n+1$. У том случају, формула за збир првих n природних бројева биће резултат следеће рачунице:

		1		2		...		49		50		
		100		99		...		52		51		
S	=	101	+	101	+	...	+	101	+	101	=50*101	=5050

Зато је $S = \dfrac{n}{2} \cdot (n+1)$.

Ако би се низ бројева исписао два пута, тако да се у првом реду они наведу у растућем, а у другом реду у опадајућем поретку, добило би се n парова константног збира $n+1$, па би тај производ требало поделити са 2, како би се добио збир једног а не два иста низа.

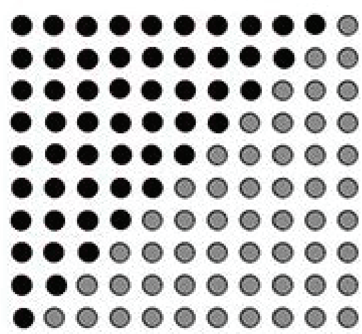
		1		2		...		99		100		
		100		99		...		2		1		
2S	=	101	+	101	+	...	+	101	+	101	=100*101	=10100

Одавде је $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Тражени збир може се одредити и коришћењем особина аритметичког низа. Довољно је помножити број чланова низа просечном вредношћу најмањег и највећег члана низа.

$$a_1 = a, \quad d = 1, \quad n = 100, \quad S = n \cdot \frac{1+n}{2}.$$

Међутим, задатак се може посматрати и геометријски: формула за збир првих n природних бројева генерише n-ти по реду троугаони број, те тражена сума одговара половини површине правоугаоника са страницама дужина n и $n+1$.



Иако се поступак којим се дошло до резултата и сам рачун разликују у ова четири случаја, добијене формуле су математички еквивалентне и за исту вредност броја n увек дају исти резултат. С друге стране, четири тока рамишљања која воде до формализације међусобно су различити и зато остајемо кратких рукава кад пожелимо да сазнамо шта је заправо урадио Гаус.

Ако је историја учитељица живота, онда је читање учитељ мудрости

Нажалост, данас не располажемо изворима на основу којих бисмо са сигурношћу могли да тврдимо шта се тачно одиграло у тој загушљивој учионици пре више од 220 година, али можемо да пробамо да докучимо колико је вероватно да се нешто десило. У том смислу обавимо један мали мисаони експеримент. Да ли сте некад чули за загонетку у којој козу, вука и купус треба пребацити преко реке чамцем, али под условом да у њега, поред скелеџије, може да стане само једно од наведених. Велика је вероватноћа да јесте. Да ли можете да се присетите од кога сте је чули и када се то десило? Врло је вероватно да сте је чули у школи од неког наставника, или можда и пре него што сте пошли у школу од родитеља, као што је случај с ауторком текста. Није ли необично што се и та загонетка први пут у писаном облику појављује у већ споменутој збирци „Задаци за гимнастику ума“ Алкуина од Јорка, дакле у VIII веку, а стигла је до вас, највероватније усменим предањем у XX или XXI веку!? Да ли је онда на месту помислити да је на сличан начин стигла и до Гауса два-три века раније (сетите се да је имао оца и полубрата који су доста путовали, као и паметног ујака)? У његово време живело је и мање људи, али било је и мање математичких текстова који су сигурно могли бити занимљиви малом Гаусу. И можда је баш зато Гаус знао за неке (или све?) Алкуинове загонетке, па самим тим и за њихова решења. Ако је задатак заиста био да се сабере првих сто бројева, није немогуће да је Гаус одмах написао решење на таблици вођен Алкуиновим задатком о мердевинама, а можда се његова генијалност осликала у модификацији Алкуиновог начина да се дође до решења? Можда је знао за задатак пре него што је почео да похађа школу, и можда је већ тада имао другачији поступак решавања од Алкуиновог?

Завршавамо овај осврт на чувену анегдоту одломком из Белове књиге [6, стр. 248]:

> У посљедњих двадесет седам година свога живота Гаус је само једанпут спавао изван свога Опсерваторија, и то када је присуствовао знанственом састанку у Берлину да би развеселио Александра фон Хумболта, који га је желио показати. Али човјек не мора увијек летјети готово изнад цијелог глобуса да би видио шта се догађа. Мозак и способност читања новина (чак кад оне лажу) и владиних извјештаја (нарочито када они лажу) каткада су бољи од било којег разгледавања града и брбљања у хотелима. Гаус је остајао код куће, читао, није вјеровао у највећи дио онога што је читао, размишљао и долазио до истине.

Порука је јасна – можда никад нећемо сазнати који је задатак Гаусов учитељ поставио, како га је заправо Гаус решио и да ли му је Алкуин уопште „помогао“ у томе, али свакако сматрамо да треба читати што више и то што разноврсније материјале. Ко зна, можда баш тебе, читаоче, очекује слава попут Гаусове у области којом се бавиш?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Thomas Little Heath, *The Works of Archimedes*, At the University Press, Cambridge, 1897.

[2] Татомир Анђелић, *Математичари и рачун*, Гласник југословенског професорског друштва, књига XIV, свеска 6, Београд, фебруар 1934.

[3] G. Waldo Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, The Mathematical Association of America, New York, 1955.

[4] David Eugene Smith, *History of Mathematics II*, Dover Publications Inc, New York, 1958.

[5] W. Sartorius Von Waltershausen, *Carl Friedrich Gauss, a Memorial*, Colorado Springs, Colorado, 1966.

[6] Erik Templ Bel, *Veliki matematičari*, Nakladni zavod Znanje, Zagreb, 1972.

[7] Vladimir Devidé, *Matematika kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[8] Љиљана Петковић, Миодраг Петковић, *Математрикс (из живота великих математичара)*, ДГИП „Нова Југославија“, Врање, 2000.

[9] Brian Hayes, *Gausss Day of Reckoning*, American Scientist, Vol. 94, No. 3, pp. 200–205, May-June 2006.

[10] Наталија Јекић, Душанка Ковачевић, *Математика 5: збирка задатака (додатна настава)*, Креативни центар, Београд, 2010.

[11] David M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill, New York, 2011.

[12] Brian Hayes, *Foolproof and Other Mathematical Meditations*, The MIT Press, Massachusetts, 2017.

[13] Andreas M. Hinz, *Translation of the Gauss story*, 2017. (из личне преписке).

[14] Алкуин од Јорка, *Задаци за гимнастику ума*, МД „Архимедес“, Београд, 2018.

[15] Friedrich Zöllner, *Beiträge zur deutschen Judenfrage mit akademischen Arabesken als Unterlagen zu einer Reform der deutschen Universutẗen*, Verlag von Oswald Mutze, Leipzig, 1894.

[16] http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/2005/gausscd/html/gauss_bio1.htm

[17] https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelmstra%C3%9Fe_(Braunschweig)

[18] https://www.braunschweig.de/tourismus/ueber-braunschweig/sehenswuerdigkeiten/blik/personen/carlfriedrich_gauss.html

[19] http://www.gauss-goettingen.de/gauss_en.php.

[20] http://www.gausschildren.org/

[21] https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Braunschweig_Gauss-Denkmal_17-eckiger_Stern.jpg

E-mail: aleksandra.ravas@gmail.com