Др Јован Вукмировић

ПРИМЕНА ДРУГЕ ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ ИНТЕГРАЛА

Друга теорема о средњој вредности интеграла изучава се у оквиру курса Математичке анализе и углавном се користи за доказ Абеловог и Дирихлеовог критеријума за конвергенцију несвојствених интеграла. Применом ове теореме се могу доказати на елементаран начин и неке важне једнакости у Математичкој анализи. У даљем тексту је неколико таквих примена, али најпре следи доказ теореме.

1. Друга теорема о средњој вредности интеграла. *Нека је* $f\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ *Риман-интеграбилна,* $g\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ *монотона. Тада важи*

$$I\equiv\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,\quad \textit{за неко } \xi\in[a,b].$$

Доказ. Не умањујући општост доказа, можемо претпоставити да је функција $g(x)$, $x\in[a,b]$ растућа, $g(a)=0$, $g(b)=1$, па треба доказати да важи

$$I\equiv\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_\xi^b f(x)\,dx,\quad \text{за неко } \xi\in[a,b].$$

(Образложење: уместо растуће функције $g(x)$ увести $g_1(x)=g(x)-g(a)$, односно $g_2(x)=\dfrac{g_1(x)}{g_1(b)}$.)

Нека је $I_n=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_i)f(x)\,dx$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ за $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Означимо $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$, $t\in[a,b]$. Следи (променом редоследа сабирања)

$$\begin{aligned}I_n&=\sum_{i=1}^n g(x_i)(F(x_i)-F(x_{i-1}))\\&=-[F(x_0)(g(x_1)-g(x_0))+F(x_1)(g(x_2)-g(x_1))+\dots+\\&\qquad+F(x_{n-1})(g(x_n)-g(x_{n-1}))]+f(b)=-S_n+F(b)\end{aligned}$$

(са S_n је означен израз у угластој загради). Функција F је непрекидна на $[a,b]$, достиже минимум m и максимум M на $[a,b]$, па је

$$S_n\geqslant m(g(x_1)-g(x_0))+\dots+m(g(x_n)-g(x_{n-1}))=m,\quad \text{односно } S_n\leqslant M.$$

Пошто је $m \leqslant S_n \leqslant M$ и F је непрекидна, за неко $t \in [a,b]$ је $F(t) = S_n$. Значи,

$$I_n = -S_n + F(b) = -F(t) + F(b) = -\int_a^t f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_t^b f(x)\,dx,$$

за неко $t \in [a,b]$, где t зависи од n.

Треба још доказати да је $I = -F(\xi) + F(b) = \int_\xi^b f(x)\,dx$, за неко $\xi \in [a,b]$. Претпоставимо супротно, да је $I \neq -F(s) + F(b)$, за свако $s \in [a,b]$, тј. $I \notin \psi([a,b])$, где је $\psi(s) = -F(s) + F(b)$. Приметимо да је $\psi([a,b])$ затворен интервал, тј. $\psi([a,b]) = [u,v]$ за неке $u, v \in \mathbf{R}$ и $(\forall n)\, I_n \in [u,v]$ јер је $I_n = \psi(t)$.

Означимо: $\delta = d(I, [u,v])$ (што значи да је $I = u - \delta$ или $I = v + \delta$, за неко $\delta > 0$). Следи, $|I - I_n| \geqslant \delta$, за произвољно $n \in \mathbf{N}$. С друге стране (пошто је $|f(x)| \leqslant Q$, $\forall x \in [a,b]$ за неко $Q > 0$) важи

$$\begin{aligned} |I_n - I| &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x_i) - g(x)||f(x)|\,dx \\ &\leqslant Q \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x_i) - g(x_{i-1})|\,dx = \frac{Q}{n} < \delta \end{aligned}$$

за $n \geqslant n_0$. Контрадикција! ■

2. Нека је $f\colon [a,+\infty) \to \mathbf{R}$ и $g\colon [a,+\infty) \to \mathbf{R}$.

(а) Абелов критеријум. *Ако је $\int_a^\infty f(x)\,dx$ конвергентан интеграл, а функција $g(x)$ монотона и ограничена на $[a,+\infty)$, онда $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ конвергира.*

(б) Дирихлеов критеријум. *Ако постоји $K \in \mathbf{R}$ тако да важи $|\int_a^A f(x)\,dx| \leqslant K$, $\forall A \geqslant a$ и функција $g(x)$, $x \geqslant a$ монотоно тежи нули кад $x \to +\infty$, онда $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ конвергира.*

Доказ. Ако је $a < A_1 < A_2$ и $A_1 \to +\infty$, $A_2 \to +\infty$, применом теореме **1** закључујемо да

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx = g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx \to 0$$

и у случју (а) и у случају (б), па тврђење следи на основу Кошијевог принципа конвергенције. ■

3. *Доказати једнакост* $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Доказ. Означимо: $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Множењем леве и десне стране са $2\sin x$ израчунавамо:

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} \quad (x \notin \pi\mathbf{Z},\ \text{где је } \pi\mathbf{Z} = \{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots\}).$$

Нека је $a_n = \int_0^{\pi/2} t\varphi_n(t)\,dt$. Важи једнакост

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Функција $g(t) = \dfrac{t}{\sin t}$ $(0 < t \leqslant \frac{\pi}{2})$, $g(0) = 1$, монотона је на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, па на основу теореме **1**

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,\sin\frac{(4n-1)t}{2}\,dt \to 0 \quad (n\to\infty),$$

јер је $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2}\left(g(0)\displaystyle\int_0^{\xi} \sin\frac{(4n-1)t}{2}\,dt + g\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\xi}^{\pi/2} \sin\frac{(4n-1)t}{2}\,dt\right)$. Следи: $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$. Остаје да се примени једнакост

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right). \quad \blacksquare$$

4. $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \cdots = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Доказ. Нека је сада $a_n = \int_0^{\pi/2} t^3\varphi_n(t)\,dt$, а функција $\varphi_n(t)$ дефинисана као у **3**. Треба израчунати a_n и (на основу теореме **1**) закључити да $a_n \to 0$. Тако се добија најпре $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \cdots = \dfrac{\pi^4}{96}$, а затим и тражени збир.

Слично, узимајући

$$a_n = \int_0^{\pi/2} (e^t - 1)\varphi_n(t)\,dt \quad \text{односно} \quad a_n = \int_0^{\pi/2} (e^t - e^{-t})\varphi_n(t)\,dt,$$

можемо израчунати збирове $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4n^2}$ итд. $\blacksquare$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Доказ. На интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ је функција $g(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ $(g(0) = g(0+) = 0)$ растућа; $g'(x) \geqslant 0$ ако је $\sin^2 x \geqslant x^2\cos x$. Последња неједнакост је тачна јер је $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$, $\cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$. На основу теореме **1**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} &\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)\sin(2n-1)x\,dx \\ &= g(0)\int_0^{\xi} \sin(2n-1)x\,dx + g\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\xi}^{\pi/2} \sin(2n-1)x\,dx \to 0,\end{aligned}$$

кад $n\to\infty$. Како је $I_n \equiv \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbf{N})$, јер је $I_{n+1} - I_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, следи да

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{x}\,dx \to \frac{\pi}{2} \quad (n\to\infty).$$

Уводећи смену $(2n-1)x = t$, добијамо

$$\int_0^{(2n-1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{\pi}{2}.$$

Пошто је интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ конвергентан, што можемо такође закључити применом теореме **1** (или Дирихлеовог критеријума), следи

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

6. (а) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 k^2} \quad (x \notin \pi\mathbf{Z})$;

(б) $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2x}{x^2 - \pi^2 k^2} \quad (x \notin \pi\mathbf{Z})$.

Доказ. (а) Означимо $\varphi_n(t) = \frac{1}{2} + \cos 2t + \cos 4t + \cdots + \cos 2nt$, $a_n = \int_0^\pi 2\cos(2\beta t)\varphi_n(t)\,dt$. Следи:

$$a_n = \frac{\sin(2\beta\pi)}{2\beta} + \sin(2\beta\pi) \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta}{\beta^2 - k^2}.$$

Пошто је $\varphi_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}$, може се a_n приказати у облику

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^\pi \cos(2\beta t)\frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(2\beta t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2\beta s)\frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\,ds. \end{aligned}$$

У последњи интеграл уводимо смену $s = \pi - t$. Важи

$$a_n = 2\cos(\beta\pi) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cos(\beta\pi - 2\beta t)\,dt.$$

Погодно је писати a_n у облику $a_n = b_n + c_n$, где је

$$b_n = 2\cos^2(\beta\pi) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt, \quad c_n = 2\cos(\beta\pi) \int_0^{\pi/2} h(t)\sin(2n+1)t\,dt,$$

$$h(t) = \frac{\cos(\beta\pi - 2\beta t) - \cos(\beta\pi)}{\sin t}, \quad h(0) = h(0+).$$

Према доказаном у **5**, $b_n \to 2\cos^2(\beta\pi) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\cos^2(\beta\pi)$, а на основу теореме **1** $c_n \to 0$, јер функција h има ограничен извод на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $(h'(0) = -2\beta^2 \cos\beta\pi = \lim_{t\to+0} h'(t))$, што значи да h има ограничену варијацију, па се може приказати у облику разлике две монотоне, ограничене функције: $h(t) = g_1(t) - g_2(t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Значи, $a_n \to \pi\cos^2(\beta\pi)$ $(n \to \infty)$, тј. важи

$$\pi\cos^2(\beta\pi) = \frac{\sin(2\beta\pi)}{2\beta} + \sin(2\beta\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{\beta^2 - k^2}.$$

Ако ову једнакост поделимо са $\pi\cos(\beta\pi)\sin(\beta\pi)$ и означимо $x=\beta\pi$, добијамо тражену једнакост.

(б) За $x\notin\pi\mathbf{Z}$ важи $\dfrac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}x$. Десну страну ове једнакости можемо приказати као разлику два реда, примењујући резултат (а). Тако добијамо тражену једнакост. ■

7. За $\alpha\in(0,1)$ је
$$B(\alpha,1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$
(Функција $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ $(x>0,\ y>0)$ је позната под именом бета-функција).

Доказ. Сменама $t=\dfrac{x}{1+x}$ и $x=\dfrac{1}{y}$ добија се
$$B(\alpha,1-\alpha)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx+\int_0^1\frac{y^{-\alpha}}{1+y}\,dy.$$
За произвољно $n\in\mathbf{N}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ важи:
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n}-\frac{x^{2n+1}}{1+x},$$
$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-\cdots-y^{2n-1}+\frac{y^{2n}}{1+y},$$
па је
$$\begin{aligned}B(\alpha,1-\alpha)&=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}-\cdots+\frac{1}{\alpha+2n}-\int_0^1\frac{x^{2n+\alpha}}{1+x}\,dx\\&\quad+\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2+\alpha}+\cdots-\frac{1}{2n-\alpha}+\int_0^1\frac{y^{2n-\alpha}}{1+y}\,dy\\&=\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-4}-\cdots+\frac{2\alpha}{\alpha^2-4n^2}-\int_0^1\frac{x^{2n+\alpha}}{1+x}\,dx+\int_0^1\frac{y^{2n-\alpha}}{1+y}\,dy.\end{aligned}$$
Преласком на лимес кад $n\to\infty$ добија се
$$B(\alpha,1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-4}-\cdots$$
Применом развоја **6**.(б) закључујемо да је $\dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}=B(\alpha,1-\alpha)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Spivak, *Calculus*, Benjamin, New York-Amsterdam, 1967.
2. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Москва 1966.

Математички факултет, Студентски трг 16/IV, Београд