Драгољуб Милошевић

ЈОШ О БРОЈЕВНИМ СРЕДИНАМА

Задатак 1. Означимо са A, G, H и K, редом, аритметичку, геометријску, хармонијску и квадратну средину за два позитивна броја a и b:

$$A=\frac{a+b}{2},\quad G=\sqrt{ab},\quad H=\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}},\quad K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Доказати да важи:

(а) $A^2\geqslant KG$; (б) $K+G\geqslant 2A$; (в) $A+H\geqslant 2G$; (г) $2K+H\leqslant 3A$.

Решење. Директно се проверава да важе једнакости

$$AH=G^2, \tag{1}$$

$$G^2+K^2=2A^2. \tag{2}$$

Искористимо ово за доказивање датих неједнакости.

(а) На основу једнакости (2) добијамо да је $G^2-2KG+K^2=2A^2-2KG$, односно $(K-G)^2=2(A^2-KG)$. Како је $(K-G)^2\geqslant 0$, из последње релације произлази $2(A^2-KG)\geqslant 0$, одакле је $A^2\geqslant KG$.

(б) Користећи једнакост (2) и доказану неједнакост (а) добијамо

$$(K+G)^2=K^2+G^2+2KG=2A^2+2KG\leqslant 2A^2+2A^2=4A^2,$$

одакле је $K+G\leqslant 2A$.

(в) Како је $(A-H)^2\geqslant 0$, имамо $A^2-2AH+H^2\geqslant 0$, што је еквивалентно са $A^2+2AH+H^2\geqslant 4AH$, односно са $(A+H)^2\geqslant 4G^2$ (због (1)). Последња неједнакост даје $A+H\geqslant 2G$.

(г) Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине за бројеве A и $2A-H$ добијамо

$$\frac{A+2A-H}{2}\geqslant\sqrt{A(2A-H)},\quad \text{тј.}\quad \left(\frac{3A-H}{2}\right)^2\geqslant A(2A-H).$$

С обзиром да је $A(2A-H)=2A^2-AH=G^2+K^2-G^2=K^2$ (због (2) и (1)), имамо

$$\left(\frac{3A-H}{2}\right)^2\geqslant K^2\quad \text{одакле}\quad K\leqslant\frac{3A-H}{2}\quad \text{и}\quad 2K+H\leqslant 3A.$$

Задатак 2. Доказати да за претходно посматране бројеве важе неједнакости:

(д) $K+H \geqslant A+G$; (ђ) $KH \leqslant AG$.

Један доказ ових неједнакости дат је у чланку [1]. Овде ћемо дати другачије доказе.

Решење. (д) Множењем леве и десне стране доказане неједнакости (б) позитивним бројем $K-G$ и применом једнакости (1) и (2) добијамо редом следеће еквивалентне неједнакости:

$$\begin{gathered}
K^2-G^2 \leqslant 2AK-2AG,\\
K^2+2AG \leqslant 2AK+G^2,\\
K^2+2AG+G^2 \leqslant 2AK+2G^2,\\
2A^2+2AG \leqslant 2AK+2AH,\\
2A(A+G) \leqslant 2A(K+H),\\
K+H \geqslant A+G.
\end{gathered}$$

(ђ) На основу једнакости (1) и неједнакости (а) добијамо редом:

$$\begin{gathered}
AHK = G^2K,\\
HK = \frac{KG}{A}\cdot G,\\
HK \leqslant \frac{A^2}{A}\cdot G,\\
KH \leqslant AG.
\end{gathered}$$

Поменимо да неједнакости (д) и (ђ) не могу да се уопште, тј. оне не важе када се примене за више од два броја. За неједнакост (д) то је показано у чланку [1], а за неједнакост (ђ) у једном од претходних чланака ове свеске Наставе математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Арсланагић, ***Неке нове неједнакости између бројевних средина***, Настава математике, **LIV**, 4, Београд, 2009, 11–14.
2. D. Milošević, *Middeltal endu en gang*, Matematik Magasinet **51**, Frederiksberg (Danmark), 2010, 1594–1595.

17. НОУ дивизије 43, 32300 Горњи Милановац