Др Ђоко Г. Марковић

ЈЕДАН НАЧИН ПРИБЛИЖНОГ РАЧУНАЊА ДЕКАДНИХ ЛОГАРИТАМА

Данас, у времену осавремењавања наставе, када су ученицима доступна разноврсна помагала, нпр. рачунари, калкулатори итд, и када се у настави математике средње школе више не користе логаритамске таблице и логаритмари (шибери), намјера ми је да овом приликом укажем на неке, у уџбеницима математике „непознате“, примјере одређивања приближних вриједности декадних логаритама првих 20 природних бројева, доста велике прецизности, без употребе таблица и било каквих других доступних помагала.

1. Основне историјске напомене о логаритмима

Конструкција логаритама почива на идеји која потиче од Michael-a Stifel-a (1487–1567). Он је у књизи *Arithmetica integra* примјетио да чланови геометријске прогресије $1, a^2, a^3, \dots$ стоје у коресподенцији са члановима аритметичке прогресије $0, 1, 2, 3, \dots$, при чему та коресподенција има својство да члан a^{x+y} геометријске прогресије, који је производ чланова a^x и a^y те прогресије, одговара члану $x+y$ аритметичке прогресије који је једнак збиру чланова x и y те кореспондентне прогресије. Аналогно, количник $a^{x-y} = a^x/a^y$ стоји у коресподенцији са разликом $x-y$. Да би ова коресподенција постојала и када је $x < y$, Stiefel допуњава полазну геометријску прогресију члановима $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots$ а полазну аритметичку прогресију члановима $-1, -2, -3, \dots$. Шкотланђанин John Napier (1550–1617), мотивисан потребом да упрости рачунање које се појављује у сферној геометрији, проширио је Stifel-ово запажање до конструкције логаритма. Своје идеје изложио је у радовима „Опис чудесног закона логаритама“ из 1614. и дјелу „Конструкција чудесног закона логаритама“ из 1619. године које је постхумно објављено.

Henry Briggs (1561–1631) предлаже да се за логаритме узме база 10 и да се логаритам броја x за основу 10, $\log_{10} x$, дефинише као број којим треба степеновати основу 10 да би се добио број x. Одатле се лако изводи да је $\log_{10} a \cdot b = \log_{10} a + \log_{10} b$ и $\log_{10} \dfrac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b$.

Како тада нијесу били у употреби степени са произвољним рационалним и ирационалним изложиоцем, Briggs је израчунавао приближне вриједности ових логаритама тако што се јединици приближио помоћу низа $\sqrt{10}$, $\sqrt{\sqrt{10}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$,

... задржавајући се на члану који се добија послије 54 узастопна извлачења квадратног коријена, тј. узимајући $a = 10^{(1/2)^{54}}$. Логаритми чланова геометријске прогресије $1, a, a^2, a^3, \ldots$ чине аритметичку прогресију:

$$\log_{10} 1 = 0, \quad \log_{10} a = \left(\frac{1}{2}\right)^{54}, \quad \log_{10} a^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{54}, \quad \log_{10} a^3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{54}, \ldots$$

Ово омогућава да се логаритми свих бројева одреде са тачношћу $(1/2)^{54}$. Најпре се неколико чланова ове аритметичке прогресије израчуна са довољном тачношћу, а онда се по наведеним правилима за логаритме производа, количника и степена одреде логаритми бројева који се могу представити у виду производа, количника или степена бројева за које је се може извршити почетни рачун. Тако је Briggs саставио таблицу логаритама природних бројева од 1 до 1000. Таблице логаритама природних бројева од 1 до 30000 написане су 1624. године. Током времена појавила су се разна практична побољшања Napier-ових и Briggs-ових идеја и таблице логаритама које су имале велику прецизност.

2. Практично приближно израчунавање декадних логаритама

Израчунајмо најприје приближно вриједности декадних логаритама бројева прве десетице. У даљем ћемо, како је то уобичајено, логаритам са основом 10 означавати једноставно са log. Приметимо најприје да је $\log 1 = 0$ (због $10^0 = 1$) и $\log 10 = 1$ (због $10^1 = 10$).

Нека је $x = \log 2$. Тада је $2^{10} = x$, а како је $2^{10} = 1024 \approx 1000$, то је $2 \approx \sqrt[10]{10^3} = 10^{0{,}3}$. Тако смо 2 приказали као степен основе 10, па како логаритам представља управо тражени експонент којим треба степеновати основу 10 да би се добио број 2, то је $\log 2 \approx 0{,}3$. Ако вриједност потражимо помоћу калкулатора, лако ћемо утврдити да је $\log 2 \approx 0{,}30103$, па је апсолутна грешка нашег приближног рачуна $\Delta_1 = 0{,}30103 - 0{,}3 = 0{,}00103$, а релативна занемарљива и износи $\delta_1 \approx 0{,}34\%$. Сада је лако приближно одредити остале логаритме природних бројева до 10.

Како је $4 = 2^2$, то је $\log 4 = 2\log 2 \approx 0{,}6$. Вриједност овог логаритма коју даје калкулатор је $\log 4 \approx 0{,}60206$. Овдје је апсолутна грешка $\Delta_2 = 0{,}00206$, а релативна поново $\delta_2 = 0{,}34\%$. Аналогно се добија $\log 8 = 3\log 2 \approx 0{,}90309$ са истом релативном грешком. Наравно, и у општем случају је $\log 2^n = n \cdot \log 2 \approx 0,3n$.

Помоћу $\log 2$ врло лако можемо одредити $\log 5$ као $\log 5 = \log(10/2) = 1 - \log 2 \approx 0{,}7$. „Тачна“ вриједност добијена помоћу калкулатора је $\log 5 \approx 0{,}69897$, па је овдје апсолутна грешка $\Delta_3 = 0{,}00103$ а релативна 0,15%.

Такође је евидентно $\log 80 = \log(8 \cdot 10) = 1 + \log 8 \approx 1{,}9$, па је лако приближно израчунати $\log 9$ као $\log 9 \approx \log\sqrt{80} = \frac{1}{2}\log 80 \approx 0{,}95$. Опет помоћу калкулатора налазимо $\log 9 \approx 0{,}95424$, па је апсолутна грешка $\Delta_4 = 0{,}00424$, а релативна $\delta_4 = 0{,}45\%$. Одавде је и $\log 3 = \log\sqrt{9} = \frac{1}{2}\log 9 \approx 0{,}475$. „Тачно“ је $\log 3 = 0{,}47712$ са релативном грешком такође 0,45%.

Имајући у виду претходно добијене резултате лако је одредити $\log 6$ као $\log = \log 2 + \log 3 \approx 0{,}775$. Помоћу калкулатора се добија $\log \approx 0{,}77815$, па је релативна грешка нашег пиближног рачуна 0,41%.

Коначно, приближну вриједност $\log 7$ одређујемо на сљедећи начин: $7 = 63 : 9 \approx 64 : 9 = (8 : 3)^2$, па је $\log 7 \approx 2(\log 8 - \log 3) \approx 2(0{,}9 - 0{,}475) = 0{,}85$. Калкулатор нам даје $\log 7 \approx 0{,}84510$. Дакле, овдје је апсолутна грешка 0,00490, а релативна 0,47%.

За одређивање приближних вриједности декадних логаритама природних бројева друге десетице можемо се користити чињеницом да је логаритамска функција растућа, тј. да за $a < b < c$ важи неједнакост $\log a < \log b < \log c$. Такође ћемо се користити приближном једнакошћу

$$\log \frac{a+b}{2} \approx \frac{\log a + \log b}{2}.$$

Тако добијамо:

$$\log 11 \approx \frac{\log 10 + \log 12}{2} = \frac{1 + 2\log 2 + \log 3}{2} \approx 1{,}0375.$$

$$\log 12 = 2\log 2 + \log 3 \approx 1{,}075.$$

$$\log 13 \approx \frac{\log 12 + \log 14}{2} = \frac{2\log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 7}{2} \approx 1{,}1125.$$

$$\log 14 = \log 2 + \log 7 \approx 1{,}15.$$

$$\log 15 = \log 3 + \log 5 \approx 1{,}175.$$

$$\log 16 = 4\log 2 \approx 1{,}2.$$

$$\log 17 \approx \frac{\log 16 + \log 18}{2} = \frac{4\log 2 + \log 2 + 2\log 3}{2} \approx 1{,}225.$$

$$\log 18 = \log 2 + 2\log 3 \approx 1{,}25.$$

$$\log 19 \approx \frac{\log 18 + \log 20}{2} = \frac{\log 2 + 2\log 3 + \log 2 + 1}{2} \approx 1{,}275.$$

$$\log 20 = 1 + \log 2 \approx 1{,}3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Пенавин, *Структура и класификација метода у настави аритметике и алгебре*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1971.
2. Butler, Wren, *The Teaching of Secondary Mathematics*, The Mc Graw-Hill book company, New York, 1960.
3. М. Перовић, *Историја математике*, скрипта са специјалистичких студија, ПМФ, Подгорица, 2003.

E-mail: djokogm@hotmail.com