НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2004, XLIX, 3–4, стр. 1–29

Др Милосав М. Марјановић

МЕТРИЧКА, ЕУКЛИДСКА, ПРОЈЕКТИВНА И ТОПОЛОШКА СВОЈСТВА

Појавност ствари у нашем окружењу се мења, али нека постојана, карактеристична својства њихових облика остају непромењена. Ж. Пиаже (J. Piaget) класификује ова својства као тополошка, пројективна и еуклидска, а спонтани развој детета управо прати такав редослед ових идеја. Нормално је интересовање једног специјалисте у образовању да зна како се ове идеје математички заснивају, без и сувише трудног читања књига које се односе на ове садржаје, а које су му често неприступачне. Циљ овог рада је да направи један непосредан приступ математичком класификовању ових идеја, а који је заснован само на читаочевом знању средњошколске математике.

1. Потрага за изгубљеним значењима

Кад у природи не би било чврстих тела, не би било ни геометрије.
А. Поенкаре (H. Poincare)

Од успона првих људских бића, до времена грчких школа филозофије и математике, геометријске идеје су биле инхерентне и оне су произлазиле као резултат човекових напора да успостави један интелигентнији однос према разноврсности облика физичких предмета који постоје у окружујућем свету. У грчко доба, нарочито с почетком Питагорејске школе, ове идеје су постале унутрашње представе апстрактних појмова, свакако развијених на основу визуализације, али логички коришћених на начин који је независан од генеративних процеса.

Као што знамо из историје математике, Талес из Милета је први доказао да угао који је уписан у полукруг јесте прави угао, ослањајући своје доказе на друге, једноставније и очигледније чињенице. У периоду од три века, од Талеса до Еуклида, антички грчки геометри су свели број једноставних, очигледних геометријских чињеница на систем а приори прихватљивих, почетних истина, које су називали постулатима, а које читалац сигурно зна из свог школског курса геометрије. Прихватање таквог система основних чињеница и извођење свих осталих геометријских чињеница из њих, претворило је грчку геометрију у идеално логички организован предмет.

Пленарно излагање на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, одржаном у Београду, 12.02.2004. године

Еуклид је био тај који је изложио све главне доприносе грчке математике у тринаест књига својих „Елемената“. Вековима су „Елементи“ служили као једини извор учења геометрије. Чак и пошто су написане неке поједностављене верзије, још увек је било тешко приступити геометрији служећи се њима. Само су старији студенти уз помоћ својих учитеља били у стању да се изборе са садржајима тог предмета. Са низом основних појмова означених недефинисаним терминима и оним датим дефиницијама, са аксиомама као основом за дедуктивне закључке, такав курс геометрије је морао бити тежак за почетника коме је недостајала неопходна имагинација која се могла формирати једино у контакту са конкретнијом реализацијом геометријских идеја. Све даља и даља дидактички мотивисана поједностављења „Елемената“ резултирала су оним што данас видимо као уџбенике еуклидске геометрије.

Поштовање еуклидске традиције се увек сматрало најбољим начином развијања логичког мишљења. Да би приступ таквом апстрактном геометријском мишљењу био успешан, одавно се сматрало да је искуство скупљено у ради са визуелним средствима неопходно. Модели геометријских тела који се могу видети у учионицама су очигледна манифестација таквих напора.

Еуклид није написао своје књиге да би их деца користила у школи. „Елементи“ су замишљени као научна расправа која је била модел перфектног и строгог излагања. Зато нема ничег лошег у курсевима који прате Еуклида, оно што може бити лоше је припрема ученика за такав курс.

Различита виђења тога шта је геометрија и како је треба предавати изложена су код Фројдентала (H. Freudenthal) [4], у глави насловљеној „Случај геометрије“. Изражавајући сопствено мишљење, Фројдентал каже: „Геометрија може бити смислена само ако изражава однос геометрије према искуственом простору. Ако наставник занемари ту своју дужност, неповратно губи шансу.“

У истој глави се приказује рад наставника у Холандији који прилазе почетној геометрији као науци о физичком простору. Почев од двадесетих година XX века, Татјана Еренфест-Афансијева је креирала наставу геометрије помоћу конкретног материјала, препуштајући деци да са њим експериментишу. Ван Хилесови (van Hieles) и ван Албада (van Albada) су наставили са таквим приступом геометрији обогаћивањем материјала и проширивањем активности тако да они укључе: савијање папира, лепљење, цртање, бојење, мерење, поплочавање и попуњавање.

Питање је до ког степена такве активности могу да буду само игра за децу, а колико могу да учине чудо у стварању њихових просторних представа; међутим, неспорно је да оне доста доприносе премошћавању јаза између реалности и геометријских апстракција. С друге стране, за већину деце геометрија не би требало да буде изазов за њихову интелигенцију, већ рационална веза са окружујућом реалности.

Испитивања која је Ж. Пијаже вршио о начинима како деца формирају геометријске појмове, свакако су утицала на креаторе планова и програма да обогате геометријске садржаје почетних разреда основних школа и да установе редослед идеја који прати спонтани развој детета. Према Пијажеовим експерименталним налазима: „Редослед дететовог геометријског развоја изгледа да је обрнут од историјског редоследа открића. Геометрија као наука започела је Еуклидовим системом усредсређеним на фигуре, углове итд, развила се у 17. веку у тзв. пројективну геометрију (која се бави проблемима перспективе), да би у 19. веку дошла топологија (која описује опште просторне односе на квалитативан начин – на пример, разлику између отворених и затворених структура, унутрашњост и спољашњост, блискост и неповезаност, ...). Тек након дужег времена у коме је добро овладало тополошким односима, дете ће почети да развија појмове еуклидске и пројективне геометрије. Тада њих гради истовремено." [7,стр. 3]

Геометријски појмови који су обично предвиђени програмом прва четири разреда основне школе почињу на опажајном нивоу. Постепено, помоћу њихових иконичних представа и кроз вербално изражавање, они постају све више апстрактни, приближавајући се нивоу апстрактности еуклидске геометрије. Те напоре да се установе конкретнија и реалистичнија значења поменутих појмова, зовемо овде потрагом за изгубљеним значењима.

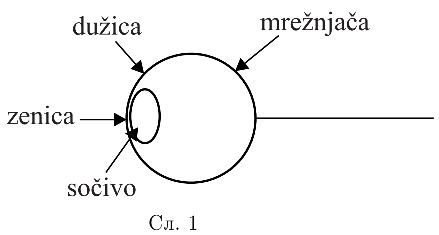
И да бисмо нешто јасније и више технички показали шта су заиста метричка (еуклидска), пројективна и тополошка својства геометријских објеката, пишемо следеће одељке, почињући описом структуре и функције ока.

2. Како функционише око

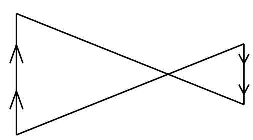
Опажање прати разумевање, то јест мисаони механизам којим ум обрађује оно што је опажено, а оно што је схваћено може, такође, да се изрази речима или симболима. Ово изгледа као пут који води из спољашњости у унутрашњост ума и натраг. Спољашњи део овог пута је јаснији и сада усмеравамо нашу пажњу на њега.

Према Аристотелу, постоји пет чула, данас позната као основна чула: вид, слух, додир, укус и мирис (а савремена психологија узима у обзир још нека: чуло покрета, чуло за равнотежу, итд). Највећа количина информација о спољашњем свету се добија кроз наше чуло вида, које се проучава више од осталих чула.

Ми видимо предмете који емитују или рефлектују светлост и, разумљиво, користећи своје очи. Једна поједностављена схема ока је дата на слици 1 и његово функционисање може да се упореди са оним фото-апарата.



Сл. 1



Сл. 2

Зеница је отвор ока који прима светло (код фото-апарата, његов отвор), сочива фокусирају светло, а она су прозирна опна која је напола испуњена течношћу, а напола лепастим ткивом (код фото-апарата, призматична тела), а задњи зид ока се зове мрежњача (retina), и на њу пада светлосна слика (филм, код фотоапарата). Мрежњача је способна да непрекидно функционише и може да сними хиљаде и хиљаде слика док смо у будном стању. Рожњача (iris) је предњи зид ока (њена боја је боја ваших очију), а њени мишићи, који формирају зеницу, контролисани су количином светла (док се отвор апарата подешава).

Светло које се пројектује од неког предмета који видимо, формира слику тог објекта на мрежњачи, а та слика стоји окренута наопако (слика 2).

Пошто је мрежњача дводимензионална површ, ми видимо само оно што је пројектовано на ту површ. Како онда видимо дубину, која чини трећу димензију? Постоји неколико кључева, који се називају монокуларним, а која дозвољавају једном оку да види извесну дубину, и бинокуларним, која долазе до изражаја када гледамо са два ока.

Монокуларни кључеви су:

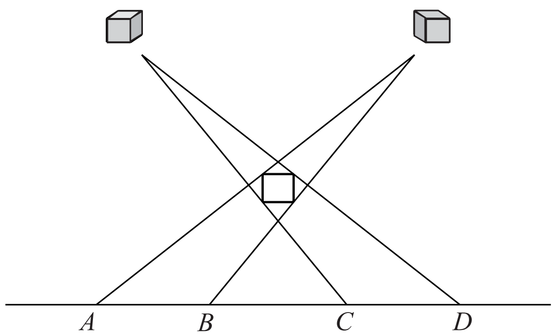
преклапање, када један објекат заклања део погледа на други објекат и када заклоњени објекат изгледа удаљенији;

линеарна перспектива – што је објекат удаљенији, то је мања његова слика на мрежњачи;

замагљеност, када удаљени објекти изгледају замагљено;

сенка – што је објекат удаљенији, то је његов изглед више осенчен.

Као бинокуларни кључ, од највећег интереса је ретинални диспаритет. Пошто свако од наша два ока гледа на објекат под нешто различитим углом, две слике тог објекта су различите на двема мрежњачама. Чувени сликар Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) први је приказао овај ефекат путем дијаграма (слика 3).



Сл. 3

Коцка заклања поглед левом оку на део AB, а десном на део CD приказане линије. Оба ока виде целу линију, а засенчену област не види ниједно од њих. Заједно, оба ока виде око коцке, обухватајући скоро целу позадину, што узрокује ефекат дубине. Две коцке на слици 3 изгледају различито, показујући шта свако око види.

3. Метричка и еуклидска својства

Једна од човекових основних идеја је она о истоветним стварима. Човеков ум је одувек био обузет тиме како да пореди ствари и како да ствара начине (моделе) по којима би их производио. На пример, данас, масовна производња добара зависи од наше способности да правимо делове који су скоро сасвим исти, то јест, једнаки су и по величини и облику.

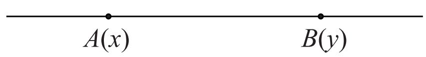
У покушају да прикажемо јединство опажања и геометрије, ми прво изражавамо природну зависност геометријских појмова од својстава чврстих тела у окружењу. Наиме, чврсто тело A се поима као чисто геометријска идеја $\overline{A}$, кад заборавимо сва његова физичка својства. Затим се идеја $\overline{A}$, за коју се сматра да постоји независно од A, назива геометријским објектом. Да будемо прецизнији, два чврста тела A_1 и A_2 могу да буду различита, а две одговарајуће идеје $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ да буду једнаке. На пример, дрвена лопта A_1 и пластична лопта A_2, обе пречника 10 cm, примери су различитих чврстих тела која стварају једнаке геометријске представе $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$.

У [4], поглавље XVI, Фројдентал цитира садржаке из предавања о подударности Дијане ван Хиле (Diana van Hiele). Та наставница је за прве примере узела подударне столице у учионици. Начин на који су ђаци изразили подударност је био заиста изврстан: ‘‘предмети које не можемо да разликујемо’’. Међутим, да ли би требало да говоримо о подударним столицама, или о столицама које су једнаке по величини и облику, ствар је за размишљање.

Два физичка објекта, једнака по величини и облику, производе две представе у нашем уму. Те представе се разликују по положају у унутрашњем простору, и ако морамо да их поимамо као чисто геометријске објекте, онда их различитим чини само њихов положај. Ако их представимо иконички, два цртежа на листу папира би требало да буду једнака по величини и облику, и онда говоримо о подударним фигурама које су представљене иконичким знацима.

Простор је једна фундаментална категорија која је основа за све наше спознајне (когнитивне) процесе. Француски филозоф А. Бергсон (H. Bergson) каже: „ . . . што се више пењемо на лествици интелигентних бића, то се јасније срећемо са независним појмом хомогеног простора“. [2]

У математици, права се узима као једнодимензионални простор. Када је тачка O фиксирана на таквој правој, може да се успостави један-један кореспонденција између скупа тачака на правој и скупа реалних бројева.

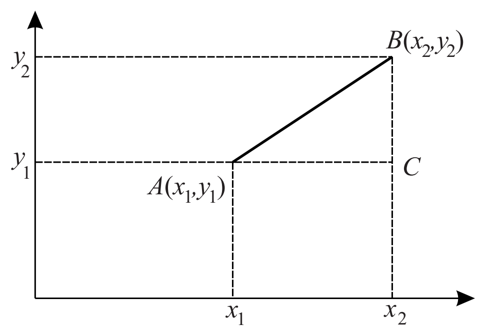


Сл. 4

Две тачке A и B, са придруженим бројевима x и y, на удаљености су која се мери дужином дужи AB, што ће бити број

$$d(A,B) = |x - y|.$$

Раван је један дводимензионални простор. Када је у њој дат координатни систем, онда се може успоставити један-један кореспонденција између тачака те равни и скупа свих уређених парова реалних бројева.



Сл. 5

Растојање између тачака $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ је дужина дужи AB, што је број

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Када говоримо о тродимензионалном простору, мислимо на спољашњи, физички простор у којем постоји све што је реално. Међутим, погрешно је у њега смештати наше геометријске појмове.

Када замишљамо неку ствар, ми је нужно „видимо" како се простире у ономе што називамо унутрашњи простор. Тако, унутрашњи простор може да се узме као наше ментално представљање спољашњег простора.

У грчкој геометрији није било експлицитног појма простора. Међутим, имплицитно, појам простора је постојао као епифеномен, као оквир у којем се геометријски објекти налазе. У савременој геометрији имамо његову симболичку кодификацију као скуп свих уређених тројки реалних бројева. Посматрање спољашњег простора као пребивалишта реалних ствари и доживљавање менталног простора као пребивалишта замишљених ствари нису научене способности, већ природни дарови људских бића. Тако, ми никада не тражимо од наших ђака објашњење шта је простор, нити покушавамо да га њима сугеришемо.

У математици, скуп тачака које су у један-један кореспонденцији са свим уређеним тројкама реалних бројева, назива се тродимензионални простор. Три броја x, y, z у тројци (x, y, z) која је придружена некој тачки A, називају се њеним координатама. Подскупови простора који кореспондирају подскуповима

$$\{(x, 0, 0) : x \in \mathbf{R}\}, \quad \{(0, y, 0) : y \in \mathbf{R}\}, \quad \{(0, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}$$

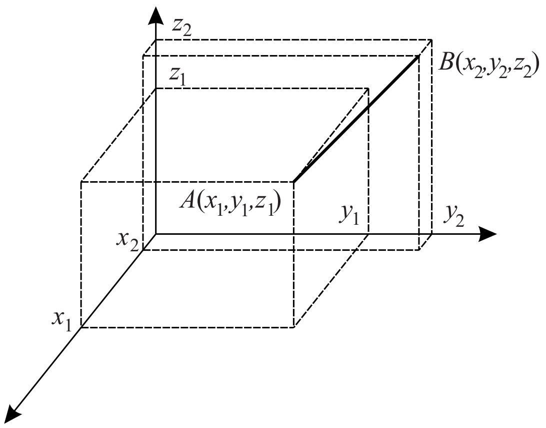
скупа тројки, називају се x-оса, y-оса и z-оса. За две тачке $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, одсечак AB се дефинише као скуп тачака који кореспондира следећем подскупу тројки

$$\{\, (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) : \lambda \in [0, 1] \,\}.$$

Онда се дужина овог одсечка, а тиме и растојање тачака A и B, дефинише као број

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Изостављамо додатне детаље који су познати читаоцу из курса аналитичке геометрије и који се обично уче путем визуелизације. Цртеж који представља координатни систем - три праве које стоје нормално једна на другу, јесте оно чиме почињу овакве лекције из аналитичке геометрије, при чему су три узајамно нормалне ивице зидова једне собе веома добра материјализација једног таквог



Сл. 6

система. Овде смо, пак, да бисмо постигли разлику између интуитивног и формалног, накратко отишли у једно формалније излагање.

Тако математички дефинисан тродимензионални простор означава се са $\mathbf{R}^3$ и назива еуклидским 3-димензионалним простором. Онда се 1-димензионални простор може идентификовати са x-осом а 2-димензионални простор са xy-равни у $\mathbf{R}^3$. Ова два простора се означавају са $\mathbf{R}^1$ - еуклидски 1-димензионални простор и са $\mathbf{R}^2$ - еуклидски 2-димензионални простор, респективно.

Једном када имамо појам еуклидског простора $\mathbf{R}^3$, можемо дефинисати геометријски објекат као било који подскуп од $\mathbf{R}^3$, али од стварног интереса су само веома правилни подскупови као што су дужи, кругови, троуглови, сфере, пирамиде, итд.

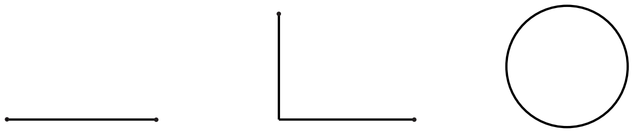
Нека су X и Y подскупови простора $\mathbf{R}^3$. Пресликавање $F\colon X \to Y$ се назива изометрија, ако за сваки пар тачака A и B у X,

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Тако, видимо да су изометрије она пресликавања која чувају дужине одсечака и да две различите тачке A и B имају различите слике $f(A)$ и $f(B)$. Према томе, изометрија $f\colon X \to Y$ је један-један пресликавање. Ако је такво пресликавање и на, за два објекта X и Y се каже да су изометрични или подударни.

Два подударна геометријска објекта имају управо исти скуп својстава и „не могу се разликовати“, осим по свом положају у простору, што се не узима као неко релевантно геометријско својство. Својство које се чува при изометријама се зове метричко својство. На пример, таква својства су: дужине, површине, запремине, дијаметри, мере углова, итд. Читалац сигурно зна многа друга метричка својства из свог школског курса геометријске, као и тврђења са разним комбинацијама тих својстава, на пример, ставове о подударности троуглова.

Да бисмо доказали да су два геометријска објекта X и Y подударни, морамо да нађемо неку изометрију $f\colon X \to Y$. Да бисмо доказали да X и Y нису конгруентни, морамо наћи метричко својство које поседује један од ових објеката, а други не. Као пример, узмимо следеће три линије



Сл. 7

и, након што смо их погледали, спремни смо да кажемо да оне нису подударне. Да бисмо то доказали, морамо да уочимо нека њихова метричка својства. Рецимо, следећа два:

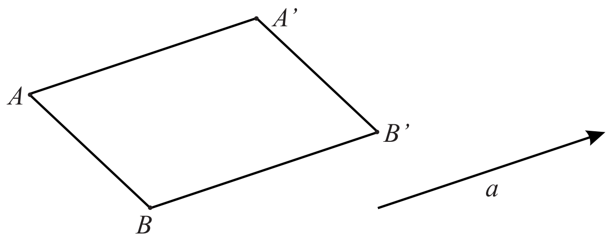
а) За сваку од две различите тачке A и B у X, дуж AB се садржи у X.

б) Постоји пар различитих тачака A и B у X, тако да се дуж AB садржи у X.

Дуж на сл. 7 поседује оба својства, а) и б), линија у облику слова L поседује само својство б), а круг не поседује ниједно од њих. Према томе, ове линије нису подударне једна са другом.

Једноставности ради, настављамо са разматрањем подударности, ограничавајући се на разматрања у равни $\mathbf{R}^2$. Пре свега, изложићемо три важна примера изометрија.

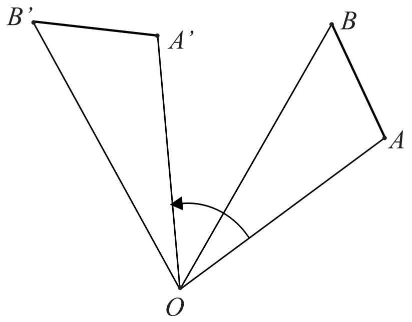
1. Транслација. Ако је дат вектор a, пресликавање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, које пресликава тачку $A \in \mathbf{R}^2$ у тачку A', тако да је вектор $\overrightarrow{AA'} = a$, зове се транслација за вектор a. (Дужи AA' и BB' су паралелне и имају једнаке дужине, на основу чега следи једнакост дужи AB и $A'B'$.)



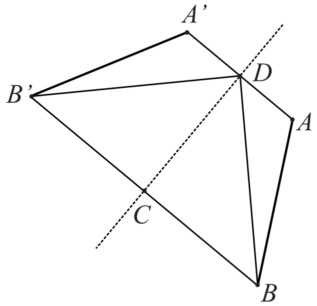
Сл. 8

2. Ротација. Ако је дат угао α и тачка $O \in \mathbf{R}^2$, пресликавање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, које пресликава тачку $A \in \mathbf{R}^2$ у тачку A', тако да су две дужи OA и OA' једнаке по дужини и формирају угао $\angle AOA'$ који је једнак α, зове се ротација око тачке O, за угао α. ($\angle AOB + \angle BOA' = \alpha$, $\angle BOA' + \angle A'OB' = \alpha$, на основу чега је $\angle AOB = \angle A'OB'$. Из подударности троуглова AOB и $A'OB'$, следи да су дужине дужи AB и $A'B'$ једнаке.)

3. Симетрија. Ако је дата права p у $\mathbf{R}^2$, пресликавање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ које пресликава тачку $A \in \mathbf{R}^2$ у тачку A', тако да је p симетрала дужи AA', зове се симетрија у односу на p (а p се зове оса симетрије). (Лако је уочити да су два



Сл. 9



Сл. 10

правоугла троугла BCD и $B'CD$ подударни, што повлачи $\angle BDA = \angle B'DA'$ и једнакост дужи BD и $B'D$. Из подударности троуглова BDA и $B'DA'$ следи једнакост дужина дужи AB и $A'B'$.)

Нека је $f\colon X \to Y$ изометрија. Ако су A, B и C три неколинеарне тачке у X, а A', B' и C' њихове f-слике у Y, онда за сваку тачку D (било да припада X или не), постоји јединствена тачка D', тако да је D' на истом растојању од A', B' и C' на коме је тачка D од A, B и C. Тако, пресликавање f је потпуно одређено чим знамо слике трију неколинеарних тачака и може да се сматра изометријом из $\mathbf{R}^2$ у $\mathbf{R}^2$.

Описно речено, два равна геометријска објекта су подударна ако је могуће померати једног од њих док се не поклопи са другим. Следећа фина теорема каже да се то може да уради у највише два елегантна потеза.

Свака изометрија $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ је једно од следећих пресликавања:

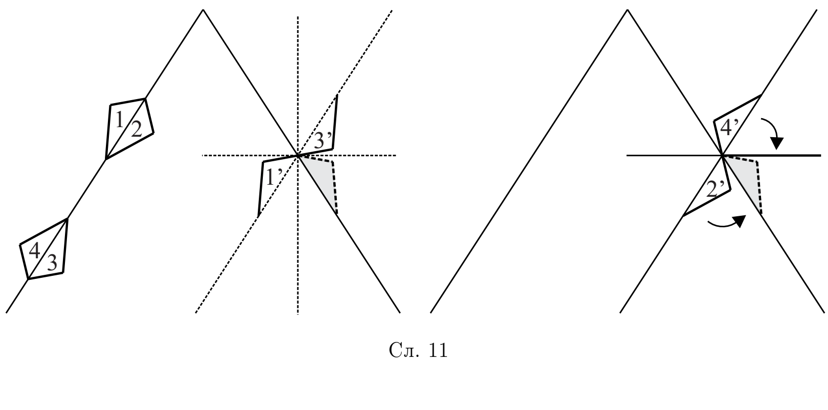
(I) транслација,

(II) ротација,

(III) симетрија,

(IV) композиција транслације и ротације,

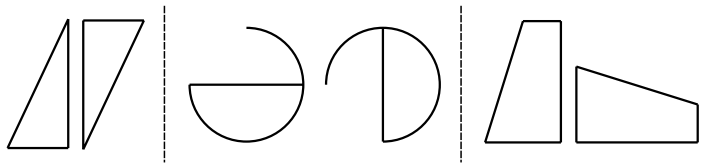
(V) композиција транслације и симетрије.



Сл. 11

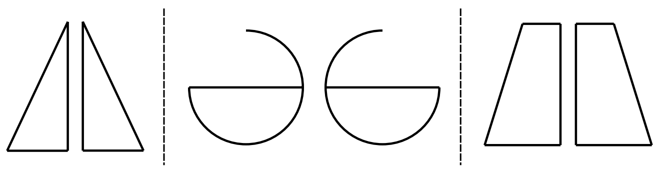
Ослањајући се на чињеницу да је изометрија потпуно одређена ако се зна како се пресликавају три неколинеарне тачке, довољно је показати да троугао ABC може да се поклопи са својом подударном f-сликом $A'B'C'$ у највише два „елегантна потеза“. Читалац ће бити задовољан када то сам увиди, гледајући цртеже на сл. 11. (Транслирани троуглови $1'$ и $3'$ се поклапају са осенченим троуглом помоћу симетрија у односу на нацртане осе, а троуглови $2'$ и $4'$ након две очигледне ротације. Случај када су одговарајуће странице два троугла паралелне, третира се скоро на исти начин.)

Горња теорема је основа за дефинисање парова подударних објеката који имају исту или супротну оријентацију. Ако су два равна објекта подударна, а подударност може да се оствари користећи пресликавања под (I), (II) или (IV), онда кажемо да они имају исту оријентацију. Три таква пара су дата са слици 12.



Сл. 12

Ако се подударност неизбежно остварује коришћењем пресликавања (III) или (V), онда кажемо да они имају супротне оријентације. Три пара супротно оријентисаних објеката су дата на слици 13.

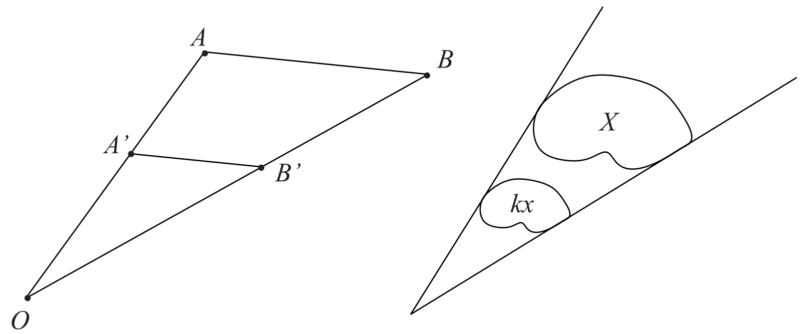


Сл. 13

Сликовито говорећи, две подударне фигуре различите оријентације не могу се поклопити померањем у равни а да се једна од њих не преврне. У математици, две различите оријентације се означавају коришћењем израза „позитиван“ и „негативан“. У случају реалних објеката чији облици су супротне оријентације, уобичајенији изрази су „леви“ и „десни“. Парови ваших шака, руку, ногу, стопала, ушију, итд. су, када се поимају геометријски, примери подударних објеката супротне оријентације. Ствари као што су парови ципела, рукавица, скија, итд. су додатни примери за то, као и леви и десни кључ, лева и десна врата, итд.

Веома је добро када се деца уче да разликују две оријентације, на пример, „десна“ (правилна) и „лева“ (неправилна) фигура шестице на слици 13. Исто тако, лоше је када неки наставници говоре за две различито оријентисане фигуре да су различите по облику. Пошто нема изговора за такве грешке на било ком нивоу наставе, сада се окрећемо појму облика. Али, прво, размотримо још једно пресликавање равни на њу саму.

4. Хомотетија. Ако је дата тачка O у равни и позитивни реални број k, пресликавање $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ које пресликава тачку $A \in \mathbf{R}^2$ у тачку A' која припада полуправој OA и која је таква да је однос дужина дужи OA' и OA једнак k, зове се хомотетија ца центром O и коефицијентом k.



Сл. 14

(Из сличности троуглова OAB и $OA'B'$ следи да је $d(A', B') = kd(A, B)$.)

За неки објекат $X \subset \mathbf{R}^2$, његова хомотетична слика се означава са kX, и kX се може посматрати као објекат X који је у свим правцима пропорционално скраћен (када је $k < 1$) или продужен (када је $k > 1$).

На веома сличан начин се хомотетија дефинише у $\mathbf{R}^3$, kX опет означава хомотетичну слику објекта X.

Нека су X и Y два геометријска објекта. Ако постоји k ($k > 0$), такво да је kX подударно са Y (или $\frac{1}{k}Y$ подударно са X), онда се каже да су X и Y слични или да имају исти еуклидски облик.

Својство које имају сви узајамно слични објекти, зове се еуклидско својство. Другим речима, неко својство је еуклидско ако се чува при хомотетијама. Осим неких, веома правилних, геометријских објеката, углавном је тешко одредити својства која карактеришу облик неког објекта. Тако, облик објекта се може сматрати тоталитетом свих његових еуклидских својстава, а, као што знамо, деца почињу са геометријом на холистички начин. Она препознавају облике објеката пре него што науче да издвајају њихова својства и анализирају их.

Примери објеката који имају иста еуклидска својства, другим речима, објеката који су слични, јесу троуглови са једнаким угловима, сви квадрати, кругови, коцке, сфере, итд.

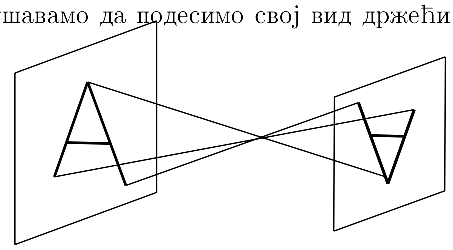
Однос свих линеарних елемената два слична објекта је исти број k, однос одговарајућих површина је k^2, а запремина k^3.

На крају, рецимо да Еуклидска геометрија проучава и метричка и еуклидска својства, као што знамо из наших школских лекција из геометрије.

4. Пројективна својства

Изглед ствари се мења, али нека од њихових стабилних, карактеристичних својстава остају непромењена. Захваљујући њима можемо разликовати врсте ствари и изграђивати своје визуелне концепте, међу којима су геометријски концепти они темељни. И, док поглед обезбеђује основу, ум производи обликовани оквир за ствари које се виде.

Када гледамо неки раван објекат (страница књиге, слика на зиду, итд), увек покушавамо да подесимо свој вид држећи главу у положају у којем су површина на којој објекат стоји и површина мрежњаче приближно паралелне. Онда су копија објекта пројектованог на мрежњачи и сам објекат, када се поимају геометријски, примери двеју сличних фигура, као што показује цртеж на сл. 15.



Сл. 15

У таквој ситуацији, објекти се виде с потпуним разликовањем, и овом начину гледања одговара препознавање свих еуклидских својстава.

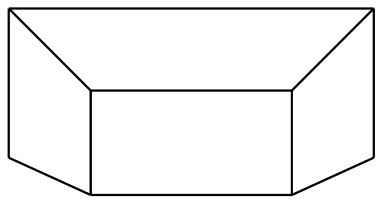
Многи објекти стоје у положају у којем не можемо да их видимо на горе наведени начин, и у којем се две поменуте равни секу под извесним углом. У зависности од овог угла, слика на мрежњачи се прилично мења. С друге стране, гледајући неко чврсто тело, видимо делове његове површи пројектоване на мрежњачи под различитим угловима. На пример, када се гледа објекат у облику коцке и када се једна од три видљиве стране пројектује као квадрат, друге две изгледају као да имају косе углове.

Дводимензионална слика неког тродимензионалног стварног објекта може бити довољно верна ако производи слику на мрежњачи која је приближно једнака ретиналној слици самог објекта. Међутим, проблем је како направити такву слику, и тај проблем се увек јавља када се покушава да направи овакво представљање. Овде ћемо описати хришћанску традицију украшавања црквених зидова сликовитим представама призора из Библије, чија је првенствена улога била да упуте вернике у питања вере.

Развијен у доба антике, мозаик је врста уметности у којој се слике праве од малих делова обојеног камена и стакла. У византијским црквама, унутрашњост је богато украшавана разнобојним дизајнима и мозаицима. Најчувенија од њих је била Света Софија, изграђена у Константинопољу за време цара Јустинијана (532–565). Катедрала је тако испланирана да буде окупана светлом које је долазило преко велике куполе, педесет метара изнад пода. Купола се наслања на четири лука који су подупрти са четири стуба и ова импресивна камена грађевина још увек стоји, након неколико стотина земљотреса, а старија је од било које велике хришћанске грађевине. Хиљаде квадратних метара позлаћеног мозаика на засвођеном плафону отварало је Небеско царство изнад глава верника. Иако не тако грандиозне, многе друге цркве су грађене по обрасцу Свете Софије.

Позлаћена позадина мозаика указује да људи и објекти постоје у неким небеским сферама, а све фигуре су више симболичне него реалистичне. Ова врста уметности, са очигледним респектом према натприродном, има једну задивљујућу лепоту, при чему је дводимензионалност њена уочљива одлика.

Почетком десетог века, фрескосликарство је почело да замењује мозаике у украшавању унутрашњих зидова цркава. Сликање фрескама је, пре свега, било јефтиније, али је, такође, било мање хиератично, јер је допуштало употребу средстава као што су светло и сенка, ради постизања ефекта дубине. Једно, посебно занимљиво, средство у фрескосликарсту је било представљање кубних објеката у контра-перспективи, када даље ивице објеката изгледају веће него оне које су ближе, напред.



Сл. 16

Замисао о контраперспективи је представљена на слици 16, а ми усмеравамо читаочеву заинтересованост на књигу [6], где се могу видети фреске из цркве Светог Климента (Охрид, Македонија) из 12-ог века, са очигледном присутношћу контраперспективе. Контраперспектива је такође присутна на фрескама више српских средњовековних манастира.

У 13. и 14. веку, оживело је интересовање за грчку и римску културу . Уместо искључивости плебејског хришћанства, коегзистенција вере и науке је покренула два паралелна пута у тражењу истине. Свети Тома Аквински (1225–74) је то изразио, рекавши да је истина вере supra non contra rationem (изнад, а не насупрот разуму). Тако су отворена врата за Ренесансу, у којој је уметност била доказ упијања световних вредности, уједињујући божанске и земаљске аспекте постојања. Уместо у екстази свеци су били сликани у ставу мирне концентрације, аскетске фигуре верника су биле замењене животним, енергичним телима, као и убедљивим приказима породичних сцена и пејсажа.

Обавезани да уче математику, физику, архитектуру, каменорез, рад са металом, дрветом, статику, итд, ренесансни уметници су били универзални умови, способни да стварају дивне слике, да конструишу утврђења, мостове, палате, цркве, итд. Ово је узроковало уздизање уметности са нижег, занатског статуса на ниво слободоних и теоријских вештина. Људи као Леонардо, Микеланђело и Рафаел су стекли велико признање својим стварањем, а појам уметника као ученог човека почео је да се уобличава.

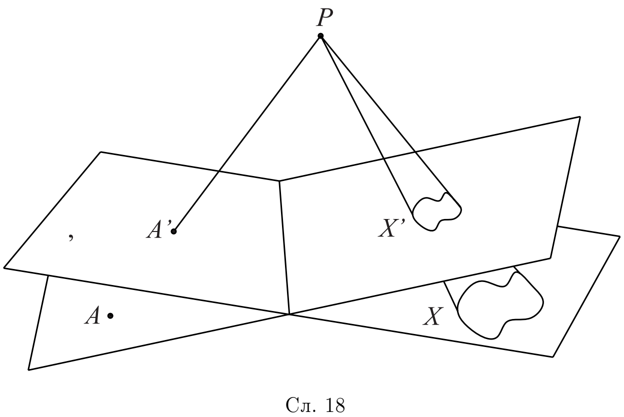
Линеарна перспектива, као кључ за тродимензионално сагледавање, била је целовито проучавана од стране ренесансних уметника и коришћена као нова, моћна техника сликања. Сликар који је поставио математичке принципе перспективе био је Пјеро дела Франческа (Piero della Francesca) (1410--92), који је, такође, био најбољи геометар свог времена, а сматрао је да су еуклидски облици најчистија форма лепоте. Његова чувена слика, „Бичевање Христа“, репродукована је на слици 17 и треба је упоредити са „равним“ фрескама да би се уочили сви ефекти ове нове технике обликовања простора. (Узето са

Сл. 17

http://www.wga.hu/html/p/piero/francesc/flagella.html)

Леонардо и други ренесансни уметници користили су перспективну решетку као основу за просторну поставку целе слике. Теорија перспективе, иако без чврсте математичке основе, учила се у сликарским школама заједно са осталим слободним уметностима.

Немачки сликар Албрехт Дирер (Albrecht Dürer) (1471–1528), у намери да пренесе својим земљацима знања која је стекао у Италији, увео је методе дводимензионалног приказивања објеката, представљајући ортогоналне пројекције кривих линија и људских фигура на две или три узајамно вертикалне равни. Ову идеју је у потпуности развио француски математичар Гаспар Монж (Gaspard Monge) (1746–1818), који је сматрао геометрију истином о простору и реалном свету. Са математичким радовима франуског математичара Жан-Виктора Понслеа (Jean-Victor Poncelet) (1788–1867), пројективна геометрија је коначно попримила облик једне нове математичке дисциплине.



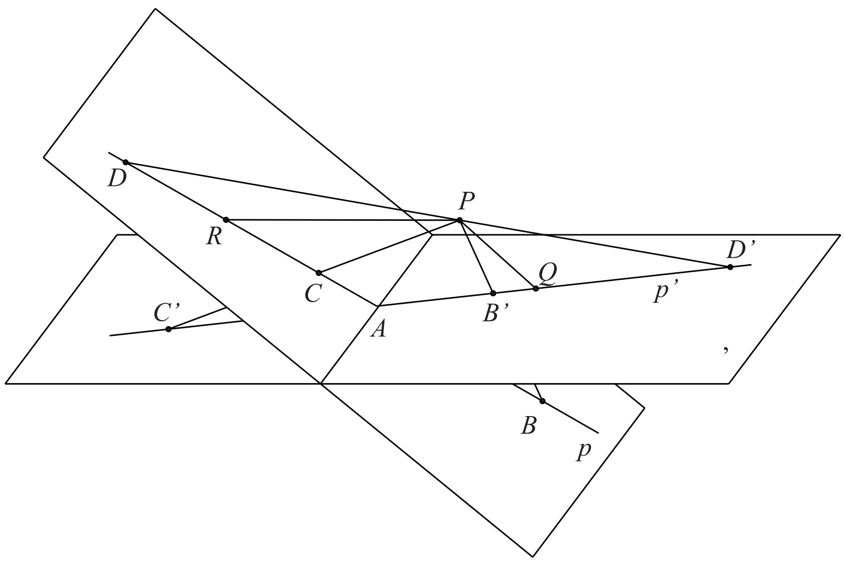
Сл. 18

Читалац кога занимају детаљи који се односе на историју пројективне геометрије може да погледа обимну књигу о историји математике од М. Клајна (M. Kline) [5].

Углавном, као што је већ речено, наше виђење се формира пројектовањем једне равни на другу. Сада ћемо томе дати прецизну математичку форму.

Ако су дате две равни, π и π', и тачка P која не припада ниједној од њих (види слику 18), за сваку тачку $A \in \pi$, дуж AP сече раван π' у некој тачки A'. Тако се успоставља кореспонденција између скупа тачака π и скупа тачака π', која се назива *пројектовањем из тачке* P равни π на раван π'. Онда се каже да се тачка A пројектује на тачку A', или да је тачка A' пројекција тачке A. За подскуп X равни π, пројекције свих његових тачака формирају подскуп X' равни π', а X' се, такође, зове пројекција скупа X, или се каже да се X пројектује на X'.

Кад је дан сунчан, видите дрвена дебла која пројектују паралелне сенке. Под светлом уличне светиљке, када би сенке биле продужене, оне би се пресецале у основи стуба на којем се налази светиљка. Овај призор из нашег окружења јасно показује како се дужи пројектују.



Сл. 19

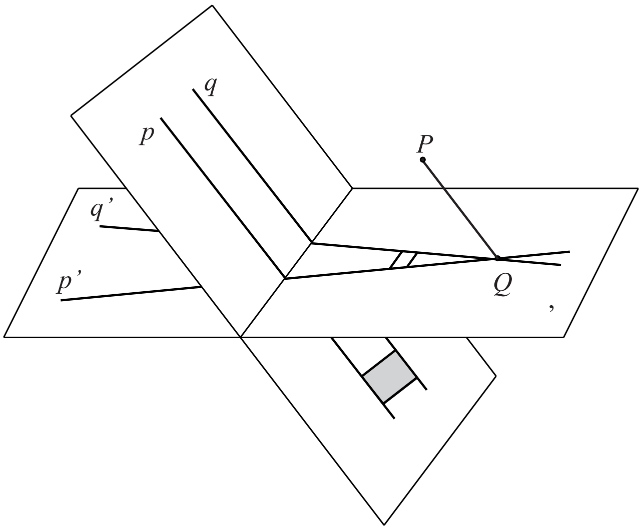
Сада се враћамо геометрији и прво разматрамо пројекцију праве. Нека је p права која припада равни π. Све праве које пролазе кроз неку тачку праве p и тачку P припадају равни β која је одређена правом p и тачком P. Према томе, све тачке праве p се пројектују на тачке праве p', која је пресек равни β и π'.

Нека су тачке Q и R пресеци равни π' и π са правим кроз P које су паралелне са π и π'. На слици 19 се види тачка-по-тачка пројекција праве p на праву p'.

Другим речима, изузимајући крајње тачке, зрак RD праве p се пројектује на зрак QD' праве p', одсечак AR на зрак AC', а зрак AV на одсечак AQ. Тачка A се пројектује на саму себе и нема тачке на p која би била пројектована на Q, нити има тачке на p' на коју би се пројектовало R.

Да бисмо елиминисали овај недостатак, за сваку праву p се уводи њена *бесконачно далека тачка* ∞_p. Са оваквим тачкама, ∞_p се пројектује на Q, а R се пројектује на $\infty_{p'}$.

Права, заједно са својом бесконачно далеком тачком, зове се *пројективна права* и пројекција једне такве праве на другу је један-један и на пресликавање њихових тачака. Да би се правила разлика, права, заједно са својом бесконачно далеком тачком, биће означена са p^*.



Сл. 20

Пројекције једног пара паралелних правих p и q (слика 20) су две праве p'^* и q'^* које се секу у тачки Q. Обе бесконачно далеке тачке, ∞_p и ∞_q, пројектују се на исту тачку Q. То је разлог што се ове две тачке идентификују и сматрају једном истом бесконачно далеком тачком. Према томе, све узајамно паралелне праве имају исту беконачно далеку тачку и двама различитим системима оваквих правих придружују се две различите беконачно далеке тачке. Раван π, заједно са свим беконачно далеким тачкама, зове се *пројективна раван*, и ми ћемо је означити са π^*.

Пројекција једне пројективне равни на другу је један-један и на пресликавање њихових тачака и као такво, то пресликавање има свој инверз. Ово значајно својство пројектовања је условљено увођењем беконачно далеких тачака и начином на који се оне идентификују. Тако, пројекција из тачке равни π^* на π'^*, узета као пресликавање, има за свој инверз пројекцију из исте тачке равни π'^* на π^* и, кадгод се $X \subset \pi^*$ пројектује на $X' \subset \pi'^*$, симетрично посматрано, $X' \subset \pi'^*$ се пројектује на $X \subset \pi^*$.

Да би се избегла могућа конфузија узрокована употребом аналогних термина, права p и раван π, узете у свом уобичајеном значењу, зваће се еуклидска права и еуклидска раван, док ће се, са додељеним бесконачно далеким тачкама, p^* и π^*, звати пројективна права и пројективна раван. Запазимо да, ако су p и q паралелне еуклидске праве, њихове кореспондентне пројективне праве p^* и q^* се секу у истој тачки у бесконачности (јер $\infty_p = \infty_q$). Према томе, сваке две пројективне праве се секу и тако не постоји појам паралелности у пројективној геометрији.

Да употпунимо ово излагање, размотрићемо још паралелно пројектовање. Нека су π и π' две равни, а p је права која није паралелна ни са π, ни са π'. Тада p одређује систем паралелних правих у простору, од којих свака сече π у тачки A, а π' у тачки A'. Ово придруживање тачака две равни се зове *паралелна пројекција* дуж праве p. Пошто се све праве система који је одређен са p секу у истој тачки ∞_p, ово придруживање се, такође, зове пројекција из тачке ∞_p, равни π, на раван π'.

Сада смо у могућности да кажемо да се неко својство равног објекта X, сачувано након произвољног броја пројекција, зове *пројективно својство*.

На слици 20 видимо (осенчени делови) како се један правоугаоник пројектује на четвороугао који има косе углове и како се пар паралелних правих пројектује на пар правих које се секу. Еуклидска својства пара правих да су паралелна, фигура да су квадрат, правоугаоник, паралелограм, итд, уопште, мере углова не чувају се при пројекцијама и, према томе, оне нису пројективна својства.

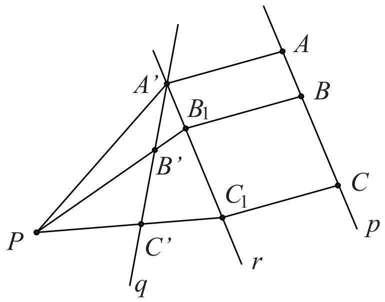
Сада ћемо навести један број пројективних својстава. Пошто је пројекција једне праве опет права, видимо да својство „бити права“ јесте пројективно својство. Када три или више тачака припадају истој правој, онда се оне зову колинеарне. Својство три или више тачака да буду колинеарне је, такође, пројективно својство. Када се три или више правих секу у истој тачки, оне се зову конкурентне. Својство три или више правих да буду конкурентне је опет пројективно својство.

Ако је линија l закривљена, њена пројекција l' ће такође бити закривљена. Заиста, кад би l' била права, онда би се инверзном пројекцијом на l добила права линија l, што је супротно претпоставци. Тако, својство једне линије да буде закривљена је пројективно својство. Право и закривљено су основни визуелни појмови. Предшколска деца лако разликују материјалне објекте на основу ових својстава, као што школска деца лакше разликују праве од кривих линија него што праве разлику на основу еуклидских или метричких својстава.

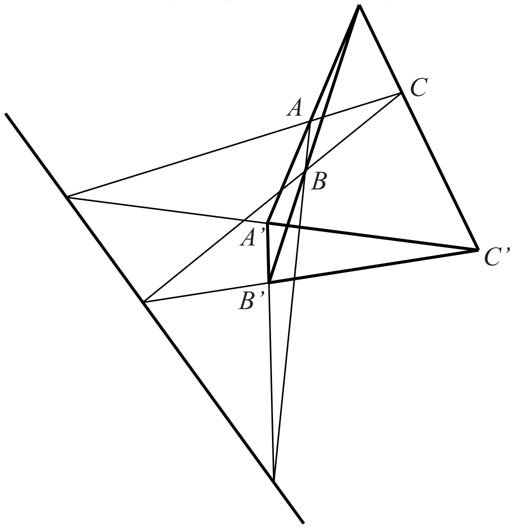
Својство једне линије да буде цик-цак, или фигуре да буде троугао, четвороугао, итд, такође је пројективно својство.

Геометријски, положај три објекта се представља као конфигурација која се састоји од три тачке. Када су објекти поравнати, ове три тачке су колинеарне. Онда се за један од објеката или за једну од тачака каже да је између друге две. Према томе, видимо да су тројке колинеарних тачака и значење предлога „између“ логички повезани. Пошто често видимо неке типове вежби осмишљених да упуте децу да правилно користе овај предлог, обратићемо посебну пажњу на овај просторни однос.

Размотримо две тројке колинеарних тачака A, B, C и A', B', C'. Показаћемо како, помоћу две пројекције, тројка A, B, C може да се преслика на тројку A', B', C'. Нека је p права која садржи тачке A, B, C, а нека је q права која садржи A', B', C'. Нацртајмо праву r кроз тачку A', паралелну са p (слика 21). Прво се тројка A, B, C паралелно пројектује дуж праве AA' на тројку A', B_1, C_1. Нека је P тачка пресека правих $B'B_1$ и $C'C_1$. Онда, пројекцијом из P, тројка A', B_1, C_1 се пресликава на тројку A', B', C'.



Сл. 21



Сл. 22

Пошто две произвољне тројке колинеарних тачака могу да се пресликавају једна на другу, видимо да при пројекцијама нису сачувани ни удаљеност тачака, ни односи дужина дужи. Тако, видимо да метричко (удаљеност тачака) и еуклидско (однос дужина) својство нису пројективна својства. Међутим, својство тачака колинеарне тројке да је једна од њих између друге две чува се при пројекцијама, тако је овај однос пројективно својство колинеарних тројки.

Најзад, уочимо да ако је неко својство очувано при свим пројекцијама, оно је, наравно, очувано при онима од њих у којима су две равни паралелне. Ово значи да је свако пројективно својство уједно и еуклидско својство (и метричко), али, као што је показано кроз неколико примера, обратно није тачно.

На крају, као тврђење типично за пројективну геометрију, формулишемо Дезаргову (Desargue) теорему. Нека су ABC и $A'B'C'$ два троугла. Ако су праве AA', BB' и CC' конкурентне, онда пресеци парова правих AB, $A'B'$; AC, $A'C'$ и BC, $B'C'$ јесу колинеарне тачке (види слику 22).

Када темена два троугла припадају ивицама триедра, пресеци парова правих припадају правој на којој се пресецају равни које су одређене површима та два троугла, што је лако видети. Али, када два троугла припадају истој равни, доказ је нешто суптилнији.

5. Тополошка својства

Сматрам да когнитивне операције које називамо мишљење нису привилегија менталних процеса изнад и изван перцепције, већ су суштински састојци саме перцепције.

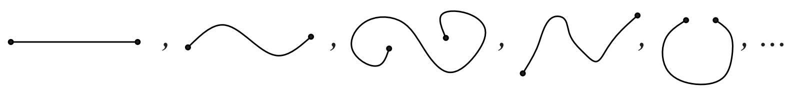
Р. Арнхајм (R. Arnheim)

На један чисто дескриптиван начин, топологија се може описати као геометрија пластичних деформација. Када се један геометријски објекат замишља направљеним од идеално пластичне материје, и када је дозвољено да се он продужава, проширује - растеже у свим правцима, или да се смањује - сажимањем у свим правцима, онда се за тај објекат каже да се пластично деформише. Општије, један део објекта може да се растеже, а истовремено неки други део може да се сажима. Да би овај опис био потпун, рецимо да није дозвољено сећи објекат на комаде, или дозволити да се његови делови преклапају. Такође, није дозвољено правити у њему рупе.

Када се, као резултат пластичне деформације, од једног објекта направи други, онда се за та два објекта каже да су тополошки еквивалентни. При том, својство које се чува при пластичној деформацији зове се *тополошко својство*. Тако, два тополошки еквивалентна објекта имају исти скуп тополошких својстава.

Сада дајемо неколико примера тополошки еквивалентних објеката.

1. Нека је $[0,1] = \{\, x : 0 < x < 1 \,\}$ јединични интервал. Полазећи од овог интервала и деформишући га, можемо добити следећи низ линија:



Сл. 23

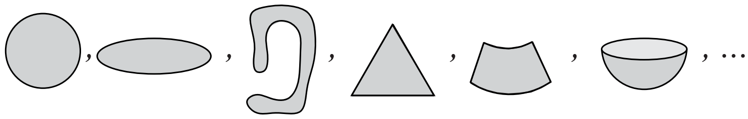
Сваке две од ових линија су тополошки еквивалентне и једна може да се добије од друге помоћу пластичне деформације. Свака од њих представља једну те исту ствар - *тополошки лук*. Међу њима, интервал има „најлепши“ геометријски облик, што није неко битно тополошко својство, пошто видимо да се облик неког објекта знатно изобличава пластичном деформацијом.

2. Нека је $S^1 = \{\, (x,y) : x^2 + y^2 = 1 \,\}$ јединични круг. Његовом деформацијом може да се добије низ различитих линија:

Сл. 24

Оне су све тополошки еквивалентне и представљају једну те исту ствар - *тополошки круг*. Геометријски круг и једнакострани троугао су „најлепши“ облици међу њима.

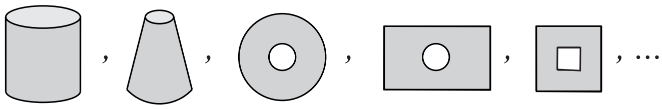
3. Нека је $D = \{\,(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\,\}$ јединични диск. Деформишући га на различите начине добијамо низ површи:



Сл. 25

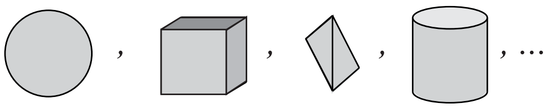
Свака од ових површи тополошки представља једну те исту ствар - *тополошки диск*.

4. Нека је $C = \{\,(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1\,\}$ (шупљи) цилиндар. Омотач зарубљене купе, прстен, четвороугао са округлом или квадратном рупом, итд, јесу објекти који се могу добити из цилиндра помоћу одговарајућих деформација.



Сл. 26

5. Нека је $S^2 = \{\,(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,\}$ јединична сфера. Њеним различитим деформацијама добијају се објекти као што су површи коцке, пирамиде, ваљка итд.



Сл. 27

Формално, два геометијска објекта, A и B, су тополошки еквивалентна ако постоји пресликавање $f\colon A \to B$ које задовољава услове:

1) f је 1-1 и на,

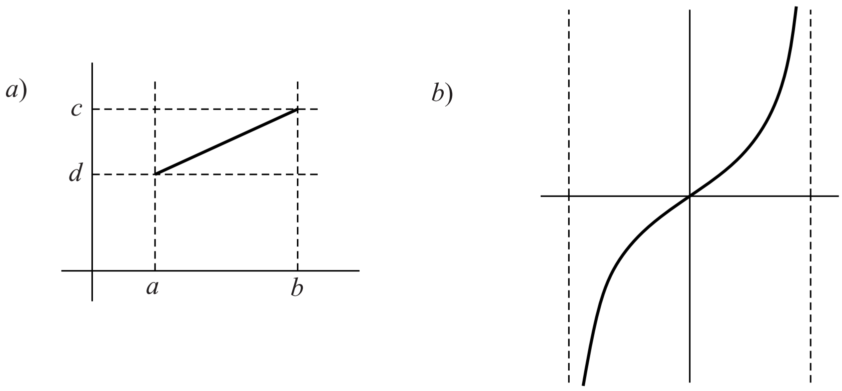
2) и f и f^{-1} су непрекидни.

Такво пресликавање f се зове *хомеоморфизам*, и два објекта, A и B, се тада зову *хомеоморфним*, што се означава помоћу $A \approx B$. Лако је видети да је „$\approx$“ релација еквиваленције на скупу геометријских објеката. (f^{-1} је такође хомеоморфизам, а исто је и композиција $g{\circ}f$ два хомеоморфизма f и g).

Сада дајемо неколико примера хомеоморфизама.

6. Нека су (a, b) и (c, d) било која два отворена интервала. Пресликавање $f\colon (a, b) \to (c, d)$ дато са

$$f(x) = c + \frac{d - c}{b - a}(x - a)$$



Сл. 28

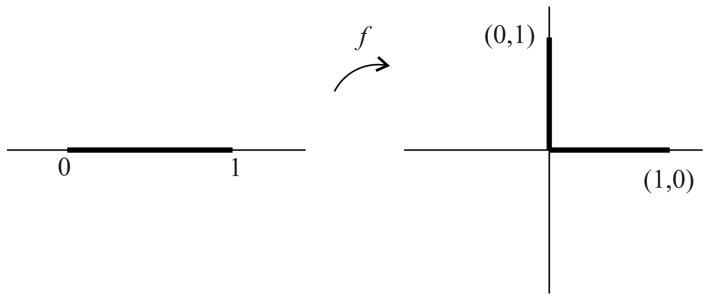
је хомеоморфизам (слика 28,а). На тај начин, било која два отворена интервала су хомеоморфна (тополошки еквивалентна).

Пресликавање $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$, дато са $f(x) = \operatorname{tg} x$, јесте хомеоморфизам ($\operatorname{arctg} x$ је непрекидна). Тако, видимо да је реална права $\mathbf{R}$ хомеоморфна са сваким отвореним интервалом.

7. Пресликавање

$$f(t) = \begin{cases} (1-2t, 0), & t \in [0, 1/2], \\ (0, 2t-1), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

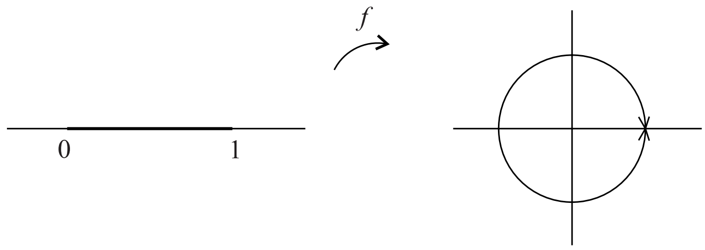
јесте хомеоморфизам јединичног интервала $[0,1]$ и „L“ линије (слика 29).



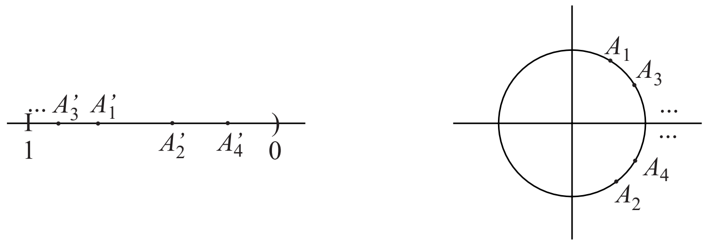
Сл. 29

8. Пресликавање $f\colon (0,1) \to S^1 \setminus \{(1,0)\}$, дато са $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, јесте хомеоморфизам. Тако видимо да је круг без тачке хомеоморфан отвореном интервалу (сл. 30).

9. Узимајући за домен полузатворени интервал $[0,1)$, а за кодомен круг S^1, формула $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ одређује пресликавање f које је 1-1 и на, непрекидно, али његов инверз f^{-1} није непрекидан. Заиста, нека је (A_n) низ тачака у S^1 који конвергира тачки $(1,0)$, као што је приказано на слици 31. Инверзне слике $A_n' = f^{-1}(A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, се расипају и низ (A_n') не конвергира тачки 0.



Сл. 30



Сл. 31

Касније ћемо видети да нема пресликавања интервала $[0, 1)$ на круг S^1 које је хомеоморфизам.

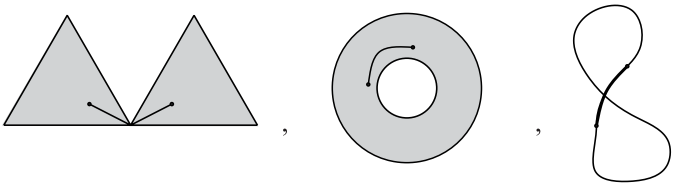
Излажући тополошка својства геометријских објеката, доследно ћемо покушавати да избегавамо математички формализам, радије користећи опажајну основу тополошког резоновања. Један број примера које смо управо размотрили служи да убеди читаоца да постоји и један формалан, а тиме и ригорознији начин излагања.

При опажању, многи објекти из спољашњег света не само да се крећу, већ и савијају, уврћу, окрећу, шире, скупљају, итд. Издвајање оног трајног и његово разликовање од промењљивог значи препознавање тополошких својстава таквих објеката. Формално, неко својство је тополошко ако се чува при хомеоморфизмима.

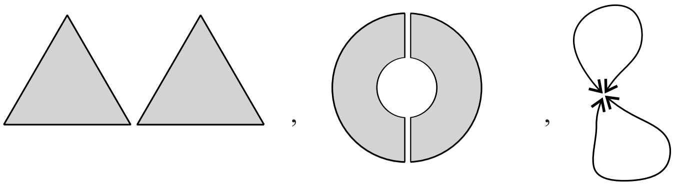
Када се не сече и не цепа, објекат остаје целина и то је основно тополошко својство. Тополошки лук се узима као прототип ове целовитости, која се формално изражава тако што се каже да су лукови повезани објекти. Као даљњи корак у уопштавању, за геометријски објекат се каже да је (луковима) *повезан* ако за било који пар његових различитих тачака постоји лук који их спаја и који је садржан у том објекту.

На пример, објекти на слици 32 су повезани, док они на слици 33 то нису (два троугла постављена један поред другог, прстен са уклоњеним тачкама на оси симетрије, број 8 са уклоњеном тачком пресека).

Приликом деформације, лук који повезује две тачке се деформише у лукове који повезују исте тачке. При хомеоморфизмима, слика лука који повезује две тачке је опет лук који повезује њихове слике. Према томе, својство објекта да буде повезан јесте тополошко својство.



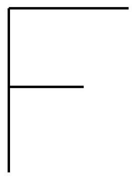
Сл. 32



Сл. 33

Да бисмо доказали да су два објекта хомеоморфна, морамо да нађемо хомеоморфизам. Да бисмо доказали да су они тополошки различити, морамо наћи тополошко својство које један од објеката има, а други нема. „Добри" објекти су увек повезани и, према томе, ово својство не помаже у великој мери разликовању. Међутим, постоји известан број својстава која су ефикаснија за разликовање.

За тачку A геометријског објекта X се каже да је *разбијајућа* ако, када се она уклони, објекат $X \setminus \{A\}$ није повезан. Тада се $X \setminus \{A\}$ распада на известан број повезаних делова. Бројеви разбијајућих и неразбијајућих тачака су тополошка својства. Када је тачка A разбијајућа, а број повезаних делова објекта $X \setminus \{A\}$ је m, онда се каже да A разбија X на m делова, што је опет једно тополошко својство. На пример, тачка гранања „F" линије (сл. 34) разбија је на 3 дела, три крајње тачке нису разбијајуће, а све остале тачке је разбијају на 2 дела.



Сл. 34

10. Све тачке x, $0 < x < 1$, интервала $[0, 1)$ су разбијајуће, док круг S^1 нема разбијајућих тачака. Одатле следи да $[0, 1)$ и S^1 нису тополошки еквивалентни и, према томе, нема пресликавања између ова два објекта које би било хомеоморфизам.

Сви чланови следећег низа слова:

Сл. 35

су тополошки различити. Заиста, свако од њих има једно тополошко својство које не дели са осталима. Пратећи редослед по којем слова стоје, таква својства су:

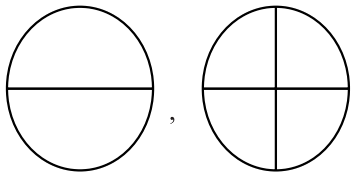
– „O“ линија нема разбијајућу тачку (све њене тачке су неразбијајуће),

– линије „I“, „T“, „X“, имају 2, 3 и 4 неразбијајуће тачке, респективно,

– „X“ линија има тачку која је разбија на 4 дела, а „H“ линија нема.

Пошто има 4 неразбијајуће тачке, „H“ линија је такође различита од прве три линије.

11. Две линије на сл. 36 немају разбијајућих тачака. Аналогно случају са разбијајућом тачком, ограничени скуп тачака, који разбија објекат на известан број делова, такође може да се употреби за тополошко разликовање. Тако, прва линија има скуп од 2 тачке који је разбија на 3 дела, док друга нема. Овај пример би могао да инспирише заинтересованог читаоца да уради неколико сличних тополошких поређења линија.



Сл. 36

Сада ћемо навести један број својстава геометријских објеката која су по природи тополошка и која се појављују чак на првом ступњу изучавања геометрије.

Гледајући на једну линију локално, то јест, посматрајући је само у малим околинама њених тачака, та линија се протеже само у једном правцу. Када се гледа локално, површ се протеже у два правца, а неко чврсто тело у три правца. Број праваца у којима се геометријски објекат локално протеже је једна визуелна основа на којој се базира тополошки појам димензије.

У топологији, линија је једнодимензионалан, површ је дводимензионалан, а геометријско тело је тродимензионалан објекат. При деформисању линија остаје линија, површ остаје површ, а тело остаје тело. На тај начин, својства геометријског објекта да буде линија, површ, или чврсто тело, јесу тополошка својства.

Као што смо већ видели, тополошки лук и тополошки круг су тополошки различити објекти. На основном ступњу школске геометрије они се зову отворена и затворена крива, и представљају чисто тополошке појмове.

Бити крајња тачка неке линије (то јест, неразбијајућа тачка) опет је тополошко својство.

Затворена крива дели раван на две области, једну унутар и другу изван те криве. Ово важно тополошко својство затворених кривих, које око разазнаје једним погледом, прилично је тешко за математичко доказивање. За однос тачке и затворене криве постоје три могућности - тачка може бити у, на или ван затворене криве. Тако, видимо да је значење предлога „у“, „на“ и „ван“ такође тополошко.

Када кажемо да је једна тачка између друге две, ми замишљамо да су те тачке колинеарне и такав појам је пројективан. Међутим, када имамо конфигурацију - отворена линија са три тачке на њој, онда је једна од тачака између друге две, што даје овом односу шири смисао него у претходном случају. Пошто се такав однос не мења при деформацијама, он је по природи тополошки.

Уочите да су број тачака пресека двеју линија и границе геометријских објеката додатни примери тополошких појмова. Сигурни смо да ће заинтересовани читалац наћи још тополошких својстава и појмова који су укључени у градиво школске геометрије.

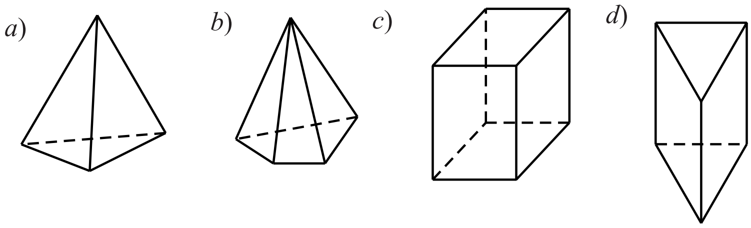
Завршимо ово излагање запажањем које показује хијерархију свих врста разматраних својстава. Пројекција је хомеоморфизам једне равни на другу. Тако, пројекције чувају сва тополошка својства, или, другим речима, свако тополошко својство неког објекта је уједно његово пројективно својство. И, као што смо већ видели, пројективна својства су еуклидска, а еуклидска су метричка.

7. Ојлер-Поенкареова карактеристика

Ако вас је садржај претходног одељка заинтересовао, онда ћете сигурно уживати и у читању овога. Овде излажемо једно фасцинантно тополошко својство које се изражава бројевима и које нам помаже да тополошки разликујемо један објекат од другога када су ти објекти сложенији од линија. Идеја има своје корене у једном својству полиедарских површи које вероватно знате из школске геометрије. Наиме, када посматрамо површи полиедара, као што су пирамида или призма (сл. 37) и када формирамо алтернативни збир:

$$v - e + f,$$

где v означава број темена, e означава број ивица, а f означава број страна, онда је у сваком од ових случајева резултат број 2. Заиста,



Сл. 37

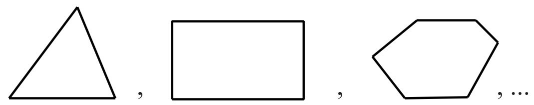
a) $4 - 6 + 4 = 2$, b) $5 - 8 + 5 = 2$, c) $8 - 12 + 6 = 2$, d) $6 - 9 + 5 = 2$.

У општем случају полиедарске површи која је тополошка сфера, важи једнакост $v - e + f = 2$. Ова чињеница је вероватно била позната у античко доба, али у савременој геометрији она је позната као Ојлерова теорема (по великом класичном математичару Леонарду Ојлеру (Leonhard Euler) (1707–1783)).

Једна далекосежна генерализација Ојлерове теореме се добија када се овакви алтернативни збирови формирају за вишедимензионалне полиедре и посебно, када се докаже да бројеви, који се добијају на тај начин, јесу тополошка својства самих геометријских објеката, који постоје независно од начина на које се они представљају као полиедри. Овакви бројеви се зову Ојлер-Поенкареове карактеристике, а поменуту генерализацију је извршио велики математичар Анри

Поенкаре (Henri Poincare) (1854–1912), који се, такође, сматра оснивачем топологије као независне гране математике.

На пример, тополошки круг S^1 може да се различито представи као полигонална линија:



Сл. 38

а сви збирови облика $v - e$:

$$3 - 3 = 0, \quad 4 - 4 = 0, \quad 6 - 6 = 0, \quad \ldots$$

дају број 0 као тополошко својство круга S^1. Када се тополошки диск представи као троугао, четвороугао, шестоугао, … , одговарајући збир $v - e + f$ ће бити:

$$3 - 3 + 1 = 1, \quad 4 - 4 + 1 = 1, \quad 6 - 6 + 1 = 1, \quad \ldots$$

а број 1 је тополошко својство диска. На основу овог својства, круг и диск су тополошки различити објекти.

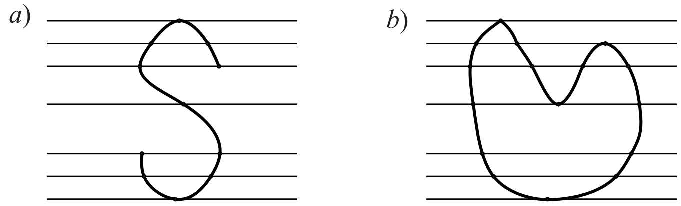
Настављајући даље, изложићемо један метод израчунавања Ојлер-Поенкареове карактеристике, који је једноставнији од онога који је већ коришћен за полиедарске површи. Нећемо покушавати да докажемо да су ове карактеристике тополошка својства, пошто такав доказ захтева веома сложене технике.

Сада почињемо са описом тог метода, корак по корак. Ако означимо један геометријски објекат са X, његова Ојлер-Поенкареова карактеристика ће бити означена са $\chi(X)$.

Када је X једна тачка, $\chi(X) = 1$ (само једно теме). Када се X састоји од n тачака, онда је $\chi(X) = n$ и, општије, када се објекти X_i, $i = 1, \ldots, n$ не секу, онда

$$\chi\Big(\bigcup X_i\Big) = \chi(X_1) + \cdots + \chi(X_n).$$

Да бисмо израчунали $\chi(X)$ када је X линија, такав објекат мора да се посматра раслојен у фибре, које су коначни скупови тачака. На слици 39 видимо један тополошки лук и тополошки круг тако раслојене.



Сл. 39

У случају а) фибре су: f_0 – једна тачка, f_1 – текуће две тачке, f_2 – две тачке, f_3 – текућа једна тачка, f_4 – две тачке, f_5 – текуће две тачке и f_6 – једна тачка. Онда се $\chi(X)$ израчунава на овај начин:

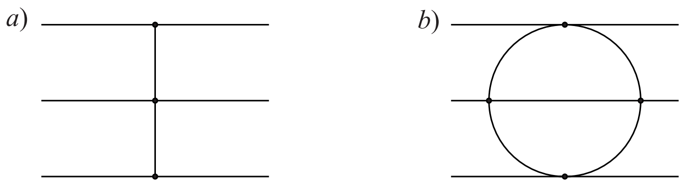
$$\begin{aligned}\chi(X) &= \chi(f_0) - \chi(f_1) + \chi(f_2) - \chi(f_3) + \chi(f_4) - \chi(f_5) + \chi(f_6)\\ &= 1 - 2 + 2 - 1 + 2 - 2 + 1 = 1.\end{aligned}$$

У случају б) фибре су (гледајући одоздо нагоре): f_0 – једна тачка, f_1 – текуће две тачке, f_2 – три тачке, f_3 – текуће четири тачке, f_4 – три тачке, f_5 – текуће две тачке и f_6 – једна тачка. Онда, као пре

$$\chi(X) = 1 - 2 + 3 - 4 + 3 - 2 + 1 = 0.$$

Прво имамо почетну фибру f_0, онда текуће фибре f_1, које су све тополошки еквивалентне једна другој, онда фибру f_2, која је тополошки различита од f_1 (случај б) или, текуће фибре f_3 које су тополошки различите од f_2 (случај а) и тако даље.

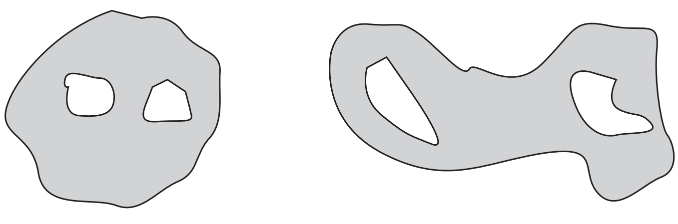
Користећи језик гешталт психологије, два објекта на слици 39 су „лоши“ облици. Одговарајући „добри“ облици се виде на следећој слици, где је и израчунавање лакше.



Сл. 40

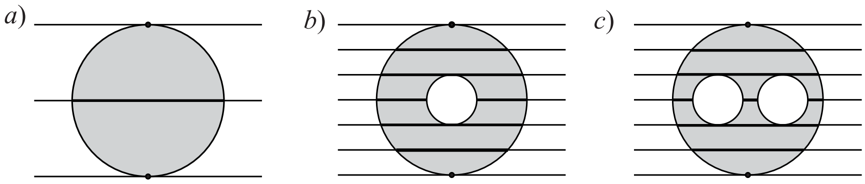
Случај а): $\chi(X) = 1 - 1 + 1 = 1$, случај б): $\chi(X) = 1 - 2 + 1 = 0$. Два „лоша“ облика су намерно узета за објашњење начина на који се објекат раставља на фибре, као и да демонстрира независност овог тополошког својства од облика објеката.

Познато је да деца лако поистовећују јако изобличен диск који има, рецимо, две рупе, са „добрим“ (слика 41), схватајући број рупа као заједничко својство. Сада ћемо показати да број рупа заиста јесте једно тополошко својствое, али, уместо „лоших“, користићемо „добре“ облике.



Сл. 41

1. Размотримо диск, диск са једном, као и диск са две рупе.

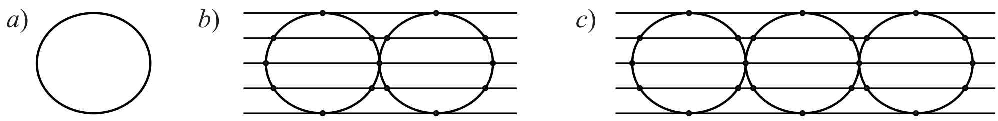


Сл. 42

$$\text{a) } \chi(X)=1-1+1=1, \qquad \text{b) } \chi(X)=1-1+1-2+1-1+1=0,$$
$$\text{c) } \chi(X)=1-1+1-3+1-1+1=-1.$$

Предлажемо читаоцу да докаже да, када је X диск са n рупа, онда $\chi(X) = -n+1$.

2. Резултати добијени у овом примеру ће бити коришћени у примеру који следи након њега. Овде разматрамо два, три, ... круга који се додирују, као што је приказано на слици 43.

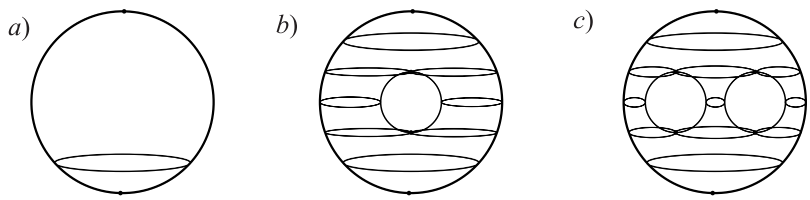


Сл. 43

a) $\chi(X)=0$, b) $\chi(X)=2-4+3-4+2=-1$, c) $\chi(X)=3-6+4-6+3=-2$

Опет предлажемо читаоцу да докаже да, када је X линија која се састоји од n кругова који се додирују на начин који је приказан на слици 43, онда је $\chi(X)=1-n$.

3. Површи које сада посматрамо су сфера, сфера са једном рупом (такође се зове торус), сфера са две рупе, ... Разлагање у фибре добија се пресецањем са фамилијом паралелних равни (слика 44).

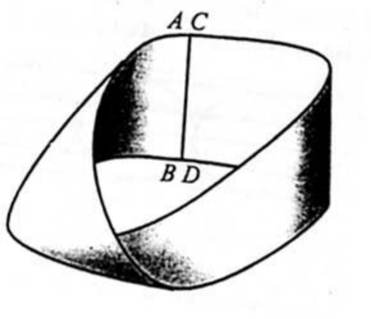


Сл. 44

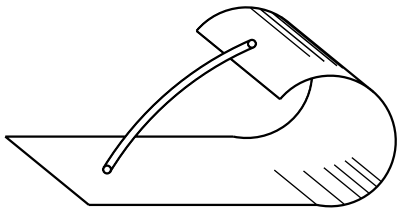
$$\text{a) } \chi(X)=1-0+1=2, \quad \text{b) } \chi(X)=1-0+(-1)-0+(-1)-0+1=0$$
$$\text{c) } \chi(X)=1-0+(-2)-0-(-2)-0+1=-2, \ldots$$

Предлажемо читаоцу да докаже да, када је X сфера са n рупа, онда је $\chi(X) = 2 - 2n$.

У случају ових површи, поново видимо да је број рупа једно значајно тополошко својство.



Сл. 45а



Сл. 45б

Завршавамо ово излагање са неколико запажања. Неке површи имају линије као границе: полусфера има круг, цилиндар има два круга, итд. Сфере и сфере са извесним бројем рупа немају границу. Занимљиво је знати да нема других оријентабилних површи без границе које би биле тополошки различите од сфере и сфере са рупама. Нека површ је оријентабилна ако је двострана – у случају да је без границе, има једну унутрашњу и једну спољашњу страну, а ако је са границом, онда путања од једне до друге стране мора да иде преко те границе. Међутим, постоје површи које су једностране. Један веома популаран пример јесте Мебијусов лист (слика 45,а)), чији папирни модел је лако направити када се правоугли папирни лист прво увије, а онда се две супротне ивице залепе. Други пример се види на слици 45,б) – правоугаони папир са две рупе се прво савије, а онда се два краја цевчице налепе на отвор рупа.

Ако сте заинтересовани да знате више о пројективној геометрији или топологији, упућујемо вас на одличну књигу Куранта и Робинса [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arnheim, *Visual Thinking*, Faber and Faber Limited, London, 1970.
2. H. Bergson, *Time and Free Will*, Harper & Brothers, New York, 1960.
3. R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1948.
4. H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Holland.
5. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Press, 1972.
6. P. Sherrard and The Editors of Time-life books, *Byzantium*, 1970.
7. J. Piaget, *How children form mathematical concepts*, Scientific American, 1953.
8. H. Poincaré, *La Science et l'hypothese*, Ernest Flammarion, Paris, 1927.