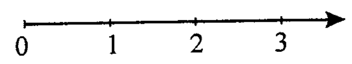
Тодосије Дикић

ПРИКАЗИВАЊЕ РАЗЛОМАКА НА БРОЈЕВНОЈ ПОЛУПРАВОЈ

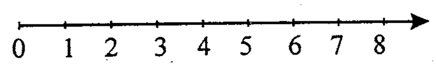
Између замишљеног и остварљивог

Један у низу несклада између онога што је замишљено, а што је у датом тренутку неостварљиво, јесте и приказивање разломака на бројевној правој, јер је претходно знање ученика недовољно или контрадикторно.

У претходним разредима ученици су упознати са појмом бројевне полуправе. У оквиру обраде скупа природних бројева ученицима је дат и појам бројевне полуправе, и то тако да је *бројевна полуправа нека полуправа чији је почетак обележен тачком O, на којој су нанесени једнаки подеоци којима се сукцесивно (редом) придружују природни бројеви*, као што је приказано на сликама 1а и 1б.



Сл. 1а

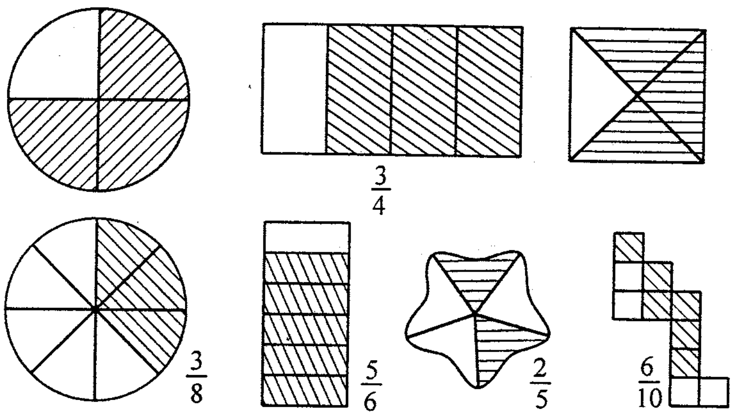


Сл. 1б

Бројевну полуправу су цртали на „различите начине“, најчешће се користећи „квадратићима“ из својих свезака, тако што су за један поделак узимали по два квадратића. Ако је требало приказати неки „већи“ број, онда су за један поделак узимали само један квадратић. Ово нам указује да су ученици схватили да је јединични поделак неодређена величина, односно да се може према указаној потреби мењати. Али, ма колики поделак узимали, они су увек свакој „црти“, односно подеоку, придруживали један број, и то, како рече један ученик, „редом“, без прескакања бројева, односно поделака.

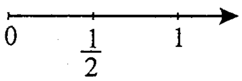
Касније, у четвртом разреду, ученици се упознају са појмом разломка као нечим што се добија поделом целе величине на одређене делове који су међусобно једнаки (слика 2).

На сличан се начин и у „Математици за V разред“ (аутори Владимир Мићић и Вера Јоцковић) ученици поново упознају с појмом разломка. Значи, и у V разреду се разломак добија када се нека целина дели на једнак број делова, па се само неки од њих употребе (узимају). Првенствено се то приказује на дужима, а касније се уопштава и на природне бројеве, где је *разломак количник два природна броја.* Као што видимо, а не може бити другачије, разломак се добија

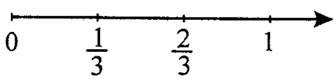


Сл. 2

поделом, односно то је неки количник. И сада се уводи појам бројевне полуправе, односно покушава се да се разломак прикаже на бројевној полуправој. Како се то чини? И у „Математици за IV разред“, односно „Математици за V разред“, то је приказано као на сликама 3 и 4.



Сл. 3



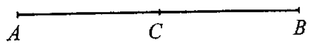
Сл. 4

Шта нам слике приказују? На слици 3 се на бројвну полуправу наносе два једнака подеока, и онда се један од њих означава бројем 1/2, а крају другог подеока се придружује број 1. На слици 4 се наносе три једнака подеока, па се првом придружује број 1/3, другом подеоку се придружује број 2/3, а трећем подеоку се придружује број 1. И ту ученике доводимо у недоумицу, односно уводимо их у „врзино коло“. Оваквим поступцима побијама две непобитне чињенице којима смо у претходном периоду „засипали“ ученике. На претходним часовима ми смо тврдили да је разломак „*разломљена*“ величина која се добија поделом целе величине. А шта сада ученицима сервирамо? Ми једну целину (јединични поделак) проглашавамо нецелом величином, а неколико (на сл. 3 две, односно на сл. 4 три) таквих целина групишемо и окарактеришемо једним целим. Можда у овоме и има неке логике (јер, јединична дуж је флексибилна, односно произвољна величина), али то уноси немир и неразум код ученика. Такође, приликом првог упознавања, сусрета са бројевном полуправом, ми смо на њој наносили једнаке подеоке, што значи да смо је делили на једнаке делове и сваком подеоку придруживали један цео број. Сада се ученик пита када смо у праву и како је могуће да се не придружује сваком подеоку цео број, већ може било који број.

Полуправу је могуће „делити“ тако што на њој можемо наносити дужи произвољне величине јер је она неограничена. Сада када треба да одредимо тачку која одговара броју 1/2, треба једну конкретну, јединичну дуж поделити на два једнака дела. Такву поделу, међутим, ђаци још нису учили.

У нижим разредима вршена је подела дужи на једнаке делове, али не геометријским путем, већ, назовимо је „аритметичком“ поделом. Наиме, тада су ученици мерним инструментима мерили величину (дужину) дужи, па су је аритметичким путем делили. На пример, ако су имали дуж од 1 dm (10 cm) па је требало поделити на два једнака дела, они су аритметички рачунали:

$$10 : 2 = 5$$

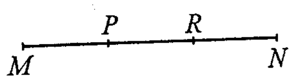


Сл. 5

а затим су на већ постојећој, нацртаној и одмереној дужи AB, почев од тачке A или од тачке B, мерили 5 cm, чиме су одређивали место тачке C за коју смо говорили да дели дуж AB на два једнака дела, односно да је дуж AC једна половини дужи AB.

На сличан начин су дуж $MN = 6\,\mathrm{cm}$ делили на три једнака дела. Дакле, опет су аритметички рачунали:

$$6 : 3 = 2$$



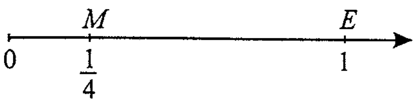
Сл. 6

па су почев од тачке M одмеравали нову дуж од 2 cm, чиме су добијали тачку P, и поновним одмеравањем од тачке P нове дужи од 2 cm добијали нову тачку R, па смо говорили да је дуж MN подељена на три једнака дела, односно да је дуж MP једнака једној трећини дужи MN, а да је дуж MR једнака две трећине дужи MN (сл. 6). Али, све ово није била геометријска подела дужи на два, односно на три једнака дела. Код бројевне полуправе ми не можемо условљавати величину јединичног подеока неким „прикладним“ мерним бројем. Чак и ако пренебрегнемо ту чињеницу да нећемо увек добити могућност узимања самерљивих дужи, већ ће се чешће појавити ситуација да се ради о двема несамерљивим дужима, односно о два несамерљива броја.

Са ученицима сам пробао да на постојећој бројевној полуправој нађемо тачке које одговарају бројевима 1/2, односно 1/4. Ученици су цртали бројевну полуправу на којој су наносили једнаке подеоке којима су придруживали „редом“ природне бројеве 1, 2, 3, 4, ... ; онда су поделак између 0 и 1 „од ока“ делили на једнаке делове, у првом задатку на два једнака дела, а у другом на четири једнака дела. Ниједан ученик није узимао да сваки други поделак означи природним бројем, односно да у другом задатку сваки четврти поделак означи природним бројем. Ово им се није дешавало јер су, понављам, стекли навику да се сваком јединичном подеоку (свакој црти) придружује један природан (цео) број. Како је разломак део целог, то су они покушавали да јединични поделак поделе на два, односно четири дела. Код поделе на два дела скоро сви ученици су за јединични поделак узимали два квадратића у свескама чиме су га „лако“ после делили на два једнака дела. Када је требало јединични поделак поделити на четири једнака дела, онда су они свој јединични поделак од „два квадратића“ лако поделили на два једнака дела, али су онда даљу поделу вршили „од ока“, јер више није постојао неки „мерни“ инструмент. Ретки су били ученици који су сада за јединични поделак узимали четири квадратића, не би ли на тај начин себи олакшали поделу на четири једнака дела. Значи, у већини случајева та подела је вршена произвољно јер су били „свесни“ тога да је разломак део неке целине, па се и до траженог подеока мора доћи дељењем јединичног подеока. У већини случајева они су одређивали приближну поделу јер геометријску поделу дужи на једнаке делове (два, четири, осам, ...) још нису учили.

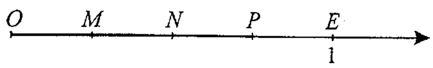
На 152. страни поменутог уџбеника за V разред стоји:

„Пример 86. Одредимо прво на бројевној полуправој тачку коју можемо доделити броју 1/4. Због $4 \times 1/4 = 1$, треба доделити тачку M, такву да је $OE = 4 \times OM$. Значи, дуж OE треба поделити на четири једнака дела (то знамо) и крај првог од тих делова је тачка M.“



Сл. 7

Коментар. Аутори кажу да прво на бројевној полуправој одредимо тачку коју можемо доделити броју 1/4, а онда кажу да дуж OE треба поделити на четири једнака дела и крај првог од тих делова је тачка M. Није ми јасно како је то могуће. Ми на почетку примера већ одређујемо тачку M, односно на бројевној полуправој већ имамо дуж OM. По свим досадашњим мерилима (учењима) то је значи јединична дуж. Онда се каже да одредимо тачку E тако да је $OE = 4 \times OM$. Значи да треба нанети четири „јединична“ подеока и добити тачку E, односно дуж OE коју ћемо „поделити“ на четири једнака дела. Како је поделити?



Сл. 8

Са слике 8 видимо да се до тачке E долази преко тачака M, N и P које већ постоје, јер постојање тачке E је условљено са $OE = 4 \times OM$. Значи да је дуж већ подељена на четири једнака дела, односно ја бих рекао да на бројевној полуправој имамо четири „јединична“ (једнака) подеока, па ако је нешто подељено, не може се поново делити.

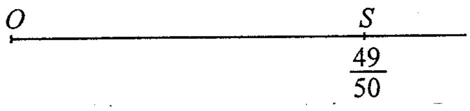
Други аспект. Део текста каже: „ ... значи дуж OE треба поделити на четири једнака дела (то знамо)“. Није тачно. *То не знамо!* Геометријска подела дужи на 2^n једнаких делова је могућа само ако је претходно обухваћена (учена) лекција о симетрали дужи која је у поменутом уџбенику негде при крају јер се и по програму предвиђа њено изучавање тек у четвртом тромесечју петог разреда. Значи, ми геометријску поделу дужи не знамо, већ само можемо дату дуж мерним инструментом измерити па добијени мерни број аритметички поделити (израчунати) и на поменутој полуправој сада поново наносити нове „јединичне“ дужи које ће дуж OE поделити на четири једнака дела. Међутим, ово није увек изводљиво јер је могуће да добијени мерни број није дељив бројем 4. Не заборавимо да постојање децималних бројева не знамо. Како онда дуж $OE = 3\,\mathrm{cm}$ ($5\,\mathrm{cm}$, $6\,\mathrm{cm}$, $\ldots$) поделити на четири дела?

На истоветан начин се приступа и разломку са имениоцем 8, чиме се баца нагласак на све разломке чији је именилац такав да се дуж може геометријски поделити симетралом.

Када су исцрпљени разломци са имениоцем 2^n, онда се за остале разломке једноставно и не помиње постојање јединичне дужи коју треба поделити (и сами аутори наводе да још нисмо учили такву поделу). Тако, да би се одредиле тачке за разломке чији је именилац број 3, нека дуж се узима за „$1/3$ јединичне“ дужи, затим се целобројним наношењем одређује прво постојање броја 1, односно тачке E (а за дуж OE се каже да је јединична), док се узимајући у обзир број који одговара бројиоцу датог разломка налази тачка која се придружује том разломку. Поступак се понавља и са разломцима чији су имениоци бројеви 5, 7, 9, $\ldots$

Оваква два узајамно непринципијелна приступа јединичној дужи доводе до конфузије у праћењу поменуте материје код многих ученика. Не заборавимо да нам велика већина ученика V разреда на питање шта је то бројевна полуправа одговара: „То је полуправа која има свој почетак, који обележавамо са O, на њој имамо једнако удаљене тачке поред којих редом пишемо природне бројеве.“ Такав један опис бројевне полуправе је прихватљив ако се зна да је прошло скоро три године од како је у II разреду упознат појам бројевне полуправе, и као таква она је у даљем раду занемаривана, односно није ни помињана. Нешто слично бројевној полуправој помиње се у четвртом разреду приликом учења сабирања и одузимања вишецифрених бројева (само у једном задатку).

Значи, ми морамо прихватити њихово предзнање о бројевној полуправој и не можемо им натурати „ad hoc“ нека нова правила за која они нису још интелектуално способни да их разумеју и прихвате, без обзира на научну исправност и постојање такве могућности. Ако се већ инсистира на томе да се одржи континуитет односа тачке и броја, односно постојање бројевне полуправе на којој се сваком рационалном броју из скупа $\mathbf{Q}^+$ може продружити једна тачка, онда се то може тако што ћемо занемарити поделу јединичне дужи на једнаке делове. Прихватљив је предлог као код примера 87 на страни 153 који ће имати универзални приступ за све бројеве типа m/n. Овакав приступ је донекле прихватљив, али напомињем да се њиме ученицима не може објаснити континуирана веза између ма ког броја облика m/n и тачке бројевне полуправе. Наиме, поставља се питање како приступити том проблему ако су у рационалном броју m/n један од бројева m или n, или пак обадва, довољно „велики“ бројеви за наше услове где се писмено изражавамо (табла, свеска формата А4, односно чешће А5). У тим условима ти бројеви ће бити неприступачно велики већ ако су око броја 30, па самим тим недоступни за реализацију, односно приказивање. Помињем овакве примере јер се неколико лекција касније сусрећемо са темом неједначина и приказивања скупа решења неједначине на бројевној полуправој. Код таквих задатака морамо избећи овакав приказ одређивања положаја тачке m/n јер су у великој већини задатака бројеви „довољно велики“ да их није могуће пронаћи на бројевној полуправој. У већини задатака не можемо „јединични“ поделак прогласити за величину $1/n$ па тражити и цртати m таквих поделака да бисмо добили тачку која одговара броју m/n.



Сл. 9

Моје размишљање иде у том правцу да се занемари постојање јединичног подеока, односно да бројевна полуправа има приказане само две тачке као на слици 9. На бројевној полуправој одређена је тачка O као њен почетак и тачка S која одговара било ком броју m/n; може и конкретно да се каже да је то, на пример, број 49/50 или ма који други број. Ово је по мени прихватљиво ако смо се у претходним примерима већ изјаснили да јединични поделак (односно тачка која припада броју 1) није никако и ничим фиксиран на бројевној полуправој. Његова величина је варијабилна и мења се из задатка у задатак, па га као таквог можемо занемарити у великој већини задатака.