Др Зоран Каделбург

ЈОШ ЈЕДНОМ О ПЕЛОВОЈ ЈЕДНАЧИНИ

О Пеловој једначини, како се традиционално, мада погрешно зове диофантска једначина

$$x^2 - dy^2 = 1, \qquad d \text{ није потпун квадрат},$$

много је писано. Но, текстови намењени ученицима најчешће не дотичу главни проблем – егзистенцију решења, већ се углавном баве једноставнијим задатком – одређивањем преосталих (бесконачно много) решења када је једно (обично најмање) већ одређено. С друге стране, текстови намењени стручњацима се већ одавно баве проблемима сасвим друге врсте – рачунарским одређивањем решења и брзином која се при том може постићи. Зато сматрамо да још један чланак о овој, за историјат теорије бројева веома значајној једначини може бити интересантан многима који су о њој чули доста, али вероватно углавном непотпуно.

1. Историјат проблема

Неки специјални примери Пелове једначине појављују се још у старогрчко доба. О једном таквом примеру биће и више речи у овом чланку. Методе решавања таквих једначина развијали су индијски математичари Брахмагупта (Brahmagupta, 598–око 660) и Баскара (Bhaskara, 1114–1185).

У модерну математику једначине оваквог типа увео је Ферма (P. Fermat, 1601–1665), тако што је у једном писму енглеским математичарима упутио „изазов“ решавања поменутог проблема. Он се у том писму најпре „жали“ како се међу математичарима аритметичким проблемима поклања премало пажње (већ се решавају претежно геометријски, па се и аритметика третира геометријски), а затим задаје да се докаже следеће тврђење.

> За произвољан дати број који није квадрат постоји бесконачно много квадрата, таквих да ако се такав квадрат помножи датим бројем и производу дода јединица, резултат је поново квадрат.

Другим речима, он тврди да ако природан број d није потпун квадрат, тада једначина

$$dy^2 + 1 = x^2$$

има бесконачно много целобројних решења.

Проблем су покушали да реше енглески математичари Браункер (W. Brouncker, 1620–1684) и Уолис (J. Wallis, 1616–1703). У првој варијанти они су „превидели“ услов да се решење тражи у целим бројевима, већ су једначину решили за рационалне x и y:

$$x = \frac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}, \quad y = \frac{2mn}{dn^2 - m^2}, \qquad m, n \in \mathbf{N}.$$

Ферма је одговорио да он никад не би поставио тако смешно лак задатак. Енглези су се жалили да он накнадно мења услове задатка, али су ипак после извесног времена послали ново решење, које је у суштини било исто као и решење Баскаре. Међутим, Ферма ни овај пут није био задовољан, јер је тврдио (с правом) да понуђени метод решавања додуше доводи до решења, али само ако се унапред претпостави да решење постоји. При том је тврдио да он зна доказ егзистенције решења и да га је извео методом „бесконачног смањивања“ који је користио и у неким другим ситуацијама. Међутим, тај доказ, као ни већину других својих доказа никад није објавио.

Ојлер (L. Euler, 1707–1783) је, проучавајући Фермаову заоставштину, наишао и на преписку везану за наведени проблем и заинтересовао се за њега. Из неког разлога он је погрешно сматрао да је у решавању учествовао један други енглески математичар, Пел (J. Pell, 1610–1685), те је једначину назвао по њему. С обзиром на Ојлеров ауторитет, тај назив се задржао и сви каснији покушаји да се једначини да коректнији назив нису успели. Тако ћемо се и ми у овом чланку држати традиционалне варијанте имена Пелове једначине.

Сам Ојлер је у својим радовима описао алгоритам за налажење решења Пелове једначине, али чак ни он није навео доказ да тај алгоритам увек доводи до решења. Први доказ је 1768. године објавио Лагранж (J. L. Lagrange, 1736–1813). Доказ је изведен коришћењем верижних разломака и тај метод је и до данас остао најпознатији. Постоје, међутим, и други докази, од којих ће о једном бити речи у овом чланку.

С тачке гледишта теоријског математичара, када се докаже да неки проблем има решење, и још се нађе алгоритам како се до тог решења долази, проблем престаје да буде интересантан. Међутим, у овом случају има још много изазова које поставља решавање Пелове једначине, а неки од њих би могли бити интересантни и „најтврђим“ теоретичарима. Наиме, чак и за релативно мале бројеве d, решења, чак и најмања, наше једначине могу бити прилично велика. Поготово је то тако ако је и сâмо d велики број. То поставља проблем налажења што ефикаснијег алгоритма решавања који би у што краћем (рачунарском) времену довео до решења, као и процене брзине таквог алгоритма. Са многим (неким још нерешеним) аспектима овог проблема заинтересовани читалац може да се упозна у веома интересантном чланку [5].

Да бисмо илустровали могућу величину бројева који се појављују при решавању Пелове једначине, у наредном одељку ћемо, такође следећи чланак [5], у кратким цртама описати добро познати „Архимедов проблем о говедима“, који представља један од првих примера једначине оваквог облика.

2. Архимедов проблем о говедима

Немачки истраживач Лесинг (Lessing, 1729–1821) је пронашао и 1773. године објавио папирус за који се сматра да садржи Архимедово (Архимед, 287–212 п.н.е) писмо Ератостену из Кирене (Ератостен, око 276–194 п.н.е). У писму се, у стиховима, говори о томе да је бог Сунце на Сицилији имао крдо говеда. При том су говеда била од четири различите врсте – бела, црна, шарена и смеђа – и, наравно, у свакој врсти било је и крава и волова. У даљем тексту се дају услови које су задовољавали бројеви крава, односно волова у свакој од тих врста. Преведено на савремене ознаке, ако се са x, y, z, t означе редом бројеви белих, црних, шарених и смеђих волова, а са x', y', z', t' одговарајући бројеви крава, Архимедов задатак је био постављен на следећи начин.

Архимедов проблем. (а) *Одредити целе бројеве x, y, z, t, као и x', y', z', t' који задовољавају следећи систем* (1)-(2) *од седам линеарних једначина*

$$x = \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)y+t, \qquad y = \Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\Big)z+t, \qquad z = \Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\Big)x+t, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x' &= \Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)(y+y'), \qquad & z' &= \Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\Big)(t+t'),\\ y' &= \Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\Big)(z+z'), \qquad & t' &= \Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\Big)(x+x'). \end{aligned} \tag{2}$$

(б) *Одредити оно решење претходног система код којег је $x+y$ квадратни, а $z+t$ троугаони број.*

При том су, као што је познато, стари Грци природан број p звали троугаоним ако је он облика $\dfrac{n(n+1)}{2}$, односно (еквивалентно) ако је $8p+1$ потпун квадрат.

Део под (а) Архимедовог проблема је, бар у принципу, сасвим једноставан. После ослобађања од разломака, имамо линеаран диофантски систем од седам једначина са осам непознатих, који се елиминацијом своди на једну једначину са две непознате (треба пазити и да решења буду природни бројеви). Мали проблем представља само то што, без обзира на једноставне полазне коефицијенте, током рада почињу да се добијају све већи бројеви. (Узгред, познато је да је Архимед и иначе волео да поставља и решава проблеме у којима се појављују веома велики бројеви.) Тако се, рутинском процедуром, добија да систем (1) задовољавају четворке природних бројева облика

$$(x, y, z, t) = k \cdot (2226, 1602, 1580, 891), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Да би и систем (2) имао природна решења мора бити $k = 4657 \cdot l$, $l \in \mathbf{N}$. Тада је

$$(x', y', z', t') = l \cdot (7206360, 4893246, 3515820, 5439213).$$

Ствари, дакле, почињу да измичу контроли. А најтеже тек долази. Јер, део задатка под (а) је за Архимеда било тек „загревање“ – главни део је био задатак под (б). Треба, дакле, одредити природан број l (што је могуће мањи) тако да број

$$x + y = 4657 \cdot 3828 \cdot l \tag{3}$$

буде потпун квадрат, а да број

$$z + t = 4657 \cdot 2471 \cdot l \tag{4}$$

буде троугаони. Како је $4657 \cdot 3828 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ (број 4657 је прост), услов (3) ће бити испуњен ако је $l = am^2$, где је $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$, а m је цео број. Да би број $z + t$ био троугаони, тј. да би $8(z + t) + 1$ био потпун квадрат (нпр. једнак n^2), мора бити, на основу (4),

$$n^2 = 8(z + t) + 1 = 8 \cdot 4657 \cdot 2471 \cdot am^2 + 1,$$

па тако за налажење бројева m и n добијамо Пелову једначину

$$n^2 = dm^2 + 1,$$

где је

$$d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 = 410\,286\,423\,278\,424.$$

Ако се позовемо на Лагранжов резултат, знамо да ова једначина има бесконачно много решења и да се сва она могу лако наћи ако се прво пронађе најмање од њих. Али како доћи до тог најмањег решења и колико је оно? Скоро је сигурно да ни сам Архимед то није знао. Наиме, после Лесинговог открића, многи математичари су, знајући и Лагранжов метод верижних разломака, покушавали да то решење пронађу. После више неуспешних покушаја тек је 1880. године немачки математичар Амтор (A. Amthor) успео да докаже да најмање решење (тачније, најмањи укупни број говеда), представљено у декадном запису има 206 545 цифара! Амтор је покушао и да нађе бар неке од тих цифара, али је већ четврта била погрешна.

Тачан запис овог најмањег решења је нађен тек у ери рачунара. У раду [6] је 1980. године објављено то решење које у оригиналу заузима 47 страница компјутерског листинга. Наводимо, према чланку [5] неке од цифара:

$$77602714\ldots237983357\ldots55081800,$$

где свака од шест тачака замењује 34420 изостављених цифара.

Кажу да су се неки математичари XIX века „забринули“ да ли је толики број говеда могао да стане на острво Сицилију. Лесинг је на то одговорио: „Ако су она припадала богу Сунца, ваљда се он некако потрудио да их тамо смести“.

3. Елементарна својства Пелове једначине

Наведимо сада нека једноставна и добро позната својства једначине

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Најпре, услов да је d различито од потпуног квадрата је очигледно неопходан да би једначина имала решења. Претпоставимо да је тај услов испуњен и препишимо једначину у облику

$$(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = 1.$$

Претпоставимо, даље, да знамо једно решење (x_1, y_1) једначине, тј. да је

$$(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) = 1.$$

Степеновањем са n тада очигледно добијамо

$$(x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = 1,$$

за неке природне бројеве x_n и y_n. Дакле, дата једначина заиста под наведеним претпоставкама има бесконачно много решења (x_n, y_n) и основни проблем је налажење бар једног од њих. Најмање од таквих решења (прецизније, оно решење код којег је $x_n + y_n\sqrt{d}$ најмање) назива се *основним решењем.* Оно што није сасвим тривијално је да се докаже да ако је (x_1, y_1) основно решење, тада су претходним поступком описана *сва* решења Пелове једначине. Доказ те чињенице даћемо, између осталог, у наредном одељку.

Када је основно решење (x_1, y_1) познато, одређивање осталих решења (x_n, y_n) може се извршити било описаним поступком степеновања, било формирањем рекурентне везе између два узастопна решења. Наиме, из

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} &= (x_n + y_n\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) \\ &= (x_1x_n + y_1dy_n) + (x_1y_n + y_1x_n)\sqrt{d} \end{aligned}$$

закључујемо да мора да важи

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1x_n + y_1dy_n \\ y_{n+1} &= x_1y_n + y_1x_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Дакле, низови (x_n) и (y_n) задовољавају систем диференцних једначина (5), уз почетне услове $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Из овог система низови (x_n) и (y_n) се одређују рекурентно.

Пример 1. Нека је $d = 14$, тј. посматрајмо једначину

$$x^2 - 14y^2 = 1.$$

Пробањем се налази њено основно решење $x_1 = 15$, $y_1 = 4$ (заиста, $15^2 - 14 \cdot 4^2 = 1$). Квадрирање даје $(15 + 4\sqrt{14})^2 = 449 + 120\sqrt{14}$, па је $x_2 = 449$,

$y_2 = 120$. Даље се може наставити степеновањем, међутим једноставније је искористити систем (5). Тако је

$$\begin{array}{lll} x_2 = 15^2 + 14 \cdot 4^2 = 449, & x_3 = 15 \cdot 449 + 4 \cdot 14 \cdot 120 = 13455, & \dots \\ y_2 = 2 \cdot 15 \cdot 4 = 120, & y_3 = 15 \cdot 120 + 4 \cdot 449 = 3596, & \dots \end{array}$$

Даљим рачуном се може добити

n	x_n	y_n
1	15	4
2	449	120
3	13455	3596
4	403201	107760
5	12082575	3229204
6	362074049	96768360

итд. Видимо да решења врло брзо расту.

Не ретко се сличне идеје користе и у неким такмичарским задацима. На пример, на Малој олимпијади 1993. године је био задат следећи проблем.

Пример 2. За сваки природан број n одредити један пар (x, y) природних бројева за које важи $x^2 - 2y^2 = 1993^n$.

Решење. Одредимо најпре тражени пар за $n = 1$. Јасно је да мора бити $x > \sqrt{1993} > 44$. Већ покушај са $x = 45$ даје решење јер је

$$1993 = 45^2 - 2 \cdot 4^2 = (45 - 4\sqrt{2})(45 + 4\sqrt{2}).$$

Степеновањем ове релације са n добија се да је

$$1993^n = (x_n - y_n\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2}) = x_n^2 - 2y_n^2$$

за

$$\begin{aligned} x_n &= 45^n + \binom{n}{2} 45^{n-2}(4\sqrt{2})^2 + \binom{n}{4} 45^{n-4}(4\sqrt{2})^4 + \cdots, \\ y_n &= \binom{n}{1} 45^{n-1} \cdot 4 + \binom{n}{3} 45^{n-3} \cdot 4^3 \cdot 2 + \cdots. \end{aligned}$$

Вратимо се сада основном проблему налажења најмањег решења. У неким специјалним случајевима то се може учинити једноставно (в. нпр. [7]).

Пример 3. (а) Ако је $d = a^2 - 1$, $a \in \mathbf{N}$, основно решење једначине $x^2 - dy^2 = 1$ је $(a, 1)$.

(б) Ако је $d = a^2 + 1$, $a \in \mathbf{N}$, основно решење једначине $x^2 - dy^2 = 1$ је $(2a^2 + 1, 2a)$.

У општем случају, међутим, као што је већ више пута речено, није унапред јасно чак ни да ли такво решење постоји. Доказу егзистенције решења Пелове једначине посвећен је следећи одељак.

4. Доказ егзистенције решења

Као што је већ речено, најчешћи поступак за доказивање егзистенције решења Пелове једначине је метод верижних разломака. Такав доказ може се наћи, на пример, у књигама [1] и [3]. Овде ћемо, следећи књигу [2], доказ извести коришћењем једне друге важне чињенице из теорије Диофантових апроксимација (в. нпр. [4]) – *Дирихлеове теореме* (P. G. L Dirichlet, 1805–1859).

Теорема 1. *Нека је α произвољан реалан број и $t \in \mathbf{N}$. Тада постоји рационалан број p/q, такав да важи*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qt} \quad \textit{и} \quad q \leqslant t.$$

Доказ. Посматрајмо $t+1$ бројева $\alpha x - [\alpha x]$ за $x = 0,\ 1,\ \dots,\ t$. Сви они припадају интервалу $[0, 1)$. Поделимо тај интервал на t интервала

$$\Big[0, \frac{1}{t}\Big), \quad \Big[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\Big), \quad \dots \quad , \quad \Big[\frac{t-1}{t}, 1\Big).$$

На основу Дирихлеовог принципа, бар један од тих интервала садржи два од датих бројева; нека су то бројеви $\alpha x_1 - [\alpha x_1]$ и $\alpha x_2 - [\alpha x_2]$ и нека је, на пример, $x_2 > x_1$. Тада је

$$\frac{1}{t} > \big|(\alpha x_2 - [\alpha x_2]) - (\alpha x_1 - [\alpha x_1])\big| = \big|\alpha(x_2 - x_1) - ([\alpha x_2] - [\alpha x_1])\big|.$$

Означимо $q = x_2 - x_1$, $[\alpha x_2] - [\alpha x_1] = p$ и важиће $0 < q \leqslant t$ и

$$|\alpha q - p| < \frac{1}{t}, \quad \text{тј.} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{tq}. \quad \blacksquare$$

Користићемо још и следеће помоћно тврђење.

Лема. *Ако су за неко $k \in \mathbf{Z}$ парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2) решења једначине $x^2 - dy^2 = k$, онда је условом*

$$X + Y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 \pm y_2\sqrt{d}), \qquad X, Y \in \mathbf{Z}$$

(узима се произвољан знак у последњој загради) одређено решење једначине $X^2 - dY^2 = k^2$.

Доказ. Следи из

$$\begin{aligned} X^2 - dY^2 &= (X + Y\sqrt{d})(X - Y\sqrt{d}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 \pm y_2\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_2 \mp y_2\sqrt{d}) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = k^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Докажимо сада и најављену теорему о егзистенцији.

Теорема 2. *За произвољан природан број* d *који није потпун квадрат, једначина* $x^2 - dy^2 = 1$ *има решења.*

Доказ. Нека је фиксиран природан број $t_1 > 1$. На основу Дирихлеове теореме постоје природни бројеви p_1 и q_1 за које важи

$$|q_1\sqrt{d} - p_1| < \frac{1}{t_1}, \qquad q_1 \leqslant t_1. \tag{6}$$

Тада је $p_1 < q_1\sqrt{d} + \dfrac{1}{t_1} < q_1\sqrt{d} + 1$, па је

$$q_1\sqrt{d} + p_1 < 2q_1\sqrt{d} + 1. \tag{7}$$

Множећи леве и десне стране неједнакости (6) и (7), с обзиром да је $q_1 \leqslant t_1$, добијамо да је

$$|p_1^2 - q_1^2 d| < 2\sqrt{d} + 1. \tag{8}$$

Изаберимо сада природан број t_2 тако да важи

$$t_2 > t_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{t_2} < |q_1\sqrt{d} - p_1|.$$

На претходно описани начин нађимо нови пар природних бројева (p_2, q_2) за које важи $|p_2^2 - q_2^2 d| < 2\sqrt{d} + 1$. Затим наставимо овај поступак налазећи низ парова (p_n, q_n) који задовољава неједначину типа (8).

Посматрајмо вредности $p_n^2 - q_n^2 d$ за све $n \in \mathbf{N}$. Све оне се налазе у интервалу $(-2\sqrt{d} - 1, 2\sqrt{d} + 1)$, па како тај интервал садржи коначно много целих бројева, то постоји цео број $k \neq 0$ у њему такав да је

$$p_n^2 - q_n^2 d = k$$

за бесконачно много вредности n. Међу тако изабраним паровима (p_n, q_n) сигурно ће постојати два, означимо их са (x_1, y_1) и (x_2, y_2), за које важи $x_1 \equiv x_2 \pmod{|k|}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{|k|}$. Означимо са x_0 и y_0 целе бројеве за које важи

$$x_0 + y_0\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}).$$

На основу Леме важи

$$x_0^2 - y_0^2 d = k^2. \tag{9}$$

При том је

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1x_2 - y_1y_2d \equiv x_1^2 - y_1^2 d \equiv 0 \pmod{|k|}, \\ y_0 &= -x_1y_2 + x_2y_1 \equiv -x_1y_1 + x_1y_1 \equiv 0 \pmod{|k|}. \end{aligned}$$

Због тога је $x_0 = x|k|$, $y_0 = y|k|$ за неке целе бројеве x и y, за које, заменом у (9) добијамо да важи $x^2 - dy^2 = 1$. ∎

Докажимо још, на крају, раније најављено тврђење према којем су поступком из одељка 3. одређена сва решења Пелове једначине.

Теорема 3. *Нека је* (x_0, y_0) *основно решење једначине* $x^2 - dy^2 = 1$ *(*d *није потпун квадрат), тј. нека је то решење за које је израз* $x + y\sqrt{d}$ *најмањи. Тада је свако решење* (x, y) *те једначине одређено условом*

$$x + y\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n, \qquad x, y \in \mathbf{N} \tag{10}$$

за неко $n \in \mathbf{N}$.

Доказ. Да је пар (x, y) одређен условом (10) решење дате једначине, доказали смо раније. Претпоставимо, супротно тврђењу, да постоји решење (x, y) те једначине за које не важи услов (10). Тада за неко $n \in \mathbf{N}$ важи

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^n < x + y\sqrt{d} < (x_0 + y_0\sqrt{d})^{n+1}.$$

Узимајући у обзир да је $(x_0 + y_0\sqrt{d})^{-1} = x_0 - y_0\sqrt{d}$, делећи претходну двоструку неједнакост са $(x_0 + y_0\sqrt{d})^n$, добијамо

$$1 < X + Y\sqrt{d} < x_0 + y_0\sqrt{d}, \tag{11}$$

где су X и Y цели бројеви одређени једнакошћу

$$X + Y\sqrt{d} = \frac{x + y\sqrt{d}}{(x_0 + y_0\sqrt{d})^n} = (x + y\sqrt{d})(x_0 - y_0\sqrt{d})^n.$$

На основу Леме, међутим, пар (X, Y) задовољава једначину $X^2 - dY^2 = 1$. При том су бројеви X и Y позитивни, јер из претходне једнакости следи да је $0 < X - Y\sqrt{d} < 1$, а из (11) је $X + Y\sqrt{d} > 1$. На тај начин је (X, Y) решење дате Пелове једначине у скупу природних бројева за које је израз $X + Y\sqrt{d}$ мањи од $x_0 + y_0\sqrt{d}$, што противречи минималности избора решења (x_0, y_0). Добијена контрадикција доказује теорему. ■

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Бухштаб, *Теория чисел*, изд. 2-ое, «Просвещение», Москва 1966.

[2] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, изд. 8-ое, «Наука», Москва 1972.

[3] J. R. Goldman, *The Queen of Mathematics. A Historically Motivated Guide to Number Theory*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts 1998.

[4] З. Каделбург, *Диофантове апроксимације*, Настава математике **46**, 1–2 (2001), 50–59.

[5] H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pell equation*, Notices of the American Mathematical Society **49**, 2 (2002), 182–192.

[6] H. L. Nelson, *A solution to Archimedes' cattle problem*, Journal of Recreational Mathematics **13**, 3 (1980–81), 162–176.

[7] М. Обрадовић, *Диофантова једначина* $X^2 - DY^2 = 1$ *у додатној настави*, Тангента **25** (2001), 1–4.