Мр Гордана Ћетковић

ГЕОМЕТРИЈСКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ

Геометријске конструкције имају важно место у геометријским истраживањима.

Ограничење коришћења само лењира и шестара при геометријским конструкцијама потиче још од Еуклида. У његовој геометрији су лењир и шестар сматрани равноправним у конструкцијама.

Много година касније примећено је да је шестар савршенији инструмент од лењира, што значи да неке конструкције могу бити изведене коришћењем само шестара (нпр. поделити круг на шест једнаких делова, конструисати тачку симетричну датој тачки у односу на дату праву, итд).

Италијанкси математичар Лоренцо Маскерони (професор универзитета у Павији) објавио је 1797. године рад „Геометрија шестара", који је касније био преведен на француски и немачки језик. У свом раду доказао је следеће тврђење:

Сваки конструктивни задатак који може да се реши помоћу лењира и шестара, може да се реши и коришћењем само шестара.

Ово тврђење је 1890. године доказао и А. Адлер на оригиналан начин — коришћењем инверзије. Поред тога, дао је и општи метод решавања конструктивних задатака коришћењем само шестара. Дански математичар Хелмслев је 1928. године у Копехнагену у књижари пронашао књигу Г. Мора под називом „Дански Еуклид", издату 1672. године у Амстердаму. У првом делу те књиге дато је комплетно решење Маскеронијевог проблема. Тако је много пре Маскеронија доказано да све геометријске конструкције које могу бити изведене лењиром и шестаром, могу да се изведу и само шестаром.

Део геометрије у коме се проучавају геометријске конструкције једним шестаром, назива се *Геометрија шестара*. Швајцарски математичар Јакоб Штајнер је 1833. године објавио рад „Геометријске конструкције изведене помоћу праве линије и непокретног круга", у коме су испитиване конструкције само лењиром. Основни резултат тога рада може бити дат у облику следећег тврђења:

Свака конструкција која може да се изведе помоћу лењира и шестара, може бити изведена и само лењиром, ако је у равни цртежа дата фиксирана кружница са својим центром.

Овде видимо да, ако хоћемо да нам лењир буде равноправан са шестаром, довољно је једнократно употребити шестар.

Решавање конструктивних задатака

При решавању конструктивних геометријских задатака дозвољено је користити само лењир и шестар. Помоћу лењира можемо конструисати праву кроз две дате тачке, а коришћењем шестара можемо конструисати кружницу ако нам је дат њен центар и једна тачка која припада кружници (или је дат полупречник као растојање између две дате тачке). Нове тачке у конструкцији добијамо у пресеку две праве, две кружнице или праве и кружнице. Према томе, имамо пет основних конструкција, и сваки задатак у еуклидској равни своди се на узастопно комбиновање основних конструкција по одређеном редоследу. Основне конструкције су:

1. Конструисати праву кроз две дате тачке.
2. Конструисати кружницу датог полупречника са центром у датој тачки.
3. Одредити пресечне тачке двеју датих кружница.
4. Одредити пресечне тачке дате кружнице и дате праве.
5. Одредити пресечне тачке двеју датих правих.

Решење сваког конструктивног задатка састоји се из четири дела: анализе, конструкције, доказа и дискусије. Код једноставнијих задатака неки ид ових делова су тривијални или непосредно следе један из другога, па се често посебно не истичу. Међутим, код већине задатака сваки од ова четири дела битан је за коректно изведену конструкцију.

Решавање конструктивних задатака само помоћу шестара

Већ смо рекли: све конструкције које могу бити изведене лењиром и шестаром могу се извести и коришћењем само шестара. Да бисмо ово доказали, треба да покажемо како се пет основних конструкција изводе само помоћу шестара. Друга и трећа основна конструкција су тривијалне, а остале три (прва, четврта и пета) дате су у задацима 2, 4 и 7. У осталим задацима је дато неколико помоћних конструкција које су нам неопходне.

Једини проблем нам је конструкција праве. Наравно, помоћу шестара ми не можемо да нацртамо непрекидну праву линију, већ само можемо конструисати произвољан број тачака које припадају правој. Међутим, како је права одређена са две било које своје тачке, у геометрији шестара конструкција праве линије сматраће се завршеном ако су конструисане две њене тачке. Да би нам слике у задацима биле јасније, праве линије ћемо уцртати испрекидано, иако те праве у конструкцијама не користимо. Са $k(O,r)$ означаваћемо кружницу чији је центар тачка O а полупречник је r.

Задатак 1. Конструисати тачку M_1 симетричну тачки M у односу на дату праву AB.

Конструкција. Конструишимо кружнице $k(A, AM)$ и $k(B, BM)$. Друга пресечна тачка ових кружница биће тражена тачка M_1, сл. 1.

Дискусија. Ако је тачка M ван праве AB, постоји јединствена тачка M_1 ($M_1 \not\equiv M$). Ако је тачка M на правој, онда је тражена тачка $M_1 \equiv M$. Да бисмо одредили да ли тачка M припада правој AB, конструишимо кружнице $k(A, AB)$ и $k(B, BA)$ и нека се оне секу у тачкама C и C_1. Ако су дужи CM и C_1M подударне, онда је тачка M на правој AB, а ако нису подударне, онда тачка M не припада правој AB.

Сл. 1 Сл. 2

Задатак 2. Права је дата двема тачкама A и B. Конструисати неколико тачака дате праве.

Конструкција. Нека је M произвољна тачка равни која не припада правој AB, и нека је M_1 њој симетрична тачка у односу на праву AB. Нека је r произвољна дуж. Конструишимо кружнице $k(M, r)$ и $k(M_1, r)$; тада њихове пресечне тачке C и D припадају правој AB, сл. 2. Ако мењамо дужину дужи r, добијамо различите тачке праве AB.

Задатак 3. Конструисати средиште кружног лука AB.

Анализа. Нека је дата кружница $k(O, r)$ и на њој две тачке A и B $(OA = OB = r)$, сл. 3. Означимо $AB = a$. Нека је C тачка, таква да је $OABC$ паралелограм. Користећи косинусну теорему лако показујемо да је за паралелограм $OB^2 + AC^2 = 2\,OC^2 + 2\,OA^2$, односно $AC^2 = 2a^2 + r^2 = a^2 + (a^2 + r^2)$. Нека је тачка X средиште лука AB. Из $\triangle OCX$ следи $XC^2 = OX^2 + OC^2 = r^2 + a^2$. Користећи последње две једнакости добијамо $AC^2 = a^2 + XC^2$. Нека је тачка Y на правој OX таква да је $OY = CX$. Тада из $\triangle OCY$ добијамо $CY^2 = OC^2 + OY^2 = a^2 + CX^2 = AC^2$ што значи да је $CY = CA$.

Сл. 3 Сл. 4

Конструкција. Дата је кружница $k(O, r)$ и тачке A и B на њој. Тада је $OA = AB = r$ и $AB = a$. Нека је тачка C пресек кружница $k(O, a)$ и

$k(B,r)$ таква да је $OABC$ паралелограм, и тачка C_1 пресек кружница $k(O,a)$ и $k(A,r)$ таква да је $OBAC_1$ паралелограм, сл. 4. Одредимо тачку Y као пресек кружница $k(C,CA)$ и $k(C_1,C_1B)$. Коначно, пресечне тачке дате кружнице $k(O,r)$ и кружнице $k(C,OY)$ су тачке X и X_1 које представљају средишта два кружна лука ограничена тачкама A и B.

Доказ. По конструкцији четвороугао $OABC$ је паралелограм и за њега важи (према анализи) $AC^2=2a^2+r^2$. Како је $CA=CY$, имамо да је $CY^2=2a^2+r^2=(a^2+r^2)+a^2$. Пошто је O средиште дужи CC_1 и $CY=C_1Y$ (јер је $CA=C_1B$), биће $OY\perp CC_1$, што значи да је $\triangle YOC$ правоугли, тј. $\angle YOC=90^\circ$. Одавде следи $CY^2=OC^2+OY^2=a^2+OY^2=a^2+(a^2+r^2)$. Дакле, добијамо везу $OY^2=a^2+r^2$.

С друге стране, по конструкцији је $OY=CX$, па је $CX^2=a^2+r^2$. Из $\triangle CXO$ добијамо

$$CX^2=OC^2+OX^2-2\,OC\cdot OX\cos\angle XOC=a^2+r^2-2ar\cos\angle XOC.$$

Из последње две једначине добијамо да је $\cos\angle XOC=0$, што значи да је то прав угао, односно да је $XO\perp AB$ (јер је $AB\parallel OC$). Из услова да права XO садржи центар круга и да је ортогонална на тетиву AB, следи да је тачка X средиште лука AB. Слично се показује да је и $X_1O\perp AB$, па је X_1 средиште другог лука AB.

Дискусија. За $A\not\equiv B$ добијамо увек две тачке X и X_1. Ако су тачке O, A и B колинеарне, $OABC$ није паралелограм, његова темена су на једној правој, али конструкција остаје иста.

Задатак 4. Конструисати пресечне тачке дате кружнице (O,r) и праве дате двема тачкама A и B.

Анализа. Разликујемо два случаја, зависно од тога да ли тачка O припада или не припада правој AB.

Први случај: $O\notin AB$.

Конструкција. Конструишимо тачку O_1 симетричну тачки O у односу на праву AB, сл. 5. Конструишимо кружницу $k(O_1,r)$ и њен пресек са кружницом $k(O,r)$ биће тачке X и Y.

Сл. 5

Сл. 6

Дискусија. Кружнице $k(O,r)$ и $k(O_1,r)$ могу да имају 0, 1 или 2 заједничке тачке, што значи да права и круг немају заједничких тачака, да права додирује круг или да права сече круг у двема тачкама.

Други случај: $O \in AB$.

Конструкција. Нека је $k(A,r_1)$ произвољна кружница која сече дату кружницу $k(O,r)$ у двема тачкама C и D, сл. 6. Сада ћемо (задатак 3) конструисати средишта кружних лукова CD (има их два), то су тражене тачке X и Y.

Доказ. Пошто су C и D тачке кружница $k(O,r)$ и $k(A,r_1)$, права OA (тј. AB) је симетрала тетиве CD, па дакле, садржи средишта X и Y лукова.

Дискусија. Увек се добијају две тачке X и Y.

Задатак 5. Конструисати одсечак који је n пута ($n \in \mathbf{N}$) већи од датог одсечка AA_1.

Конструкција. Дате су тачке A и A_1, $AA_1 = r$, сл. 7. Конструишемо кружницу $k(A_1,r)$ и тражимо њене пресеке редом са кружницама $k(A,r)$ – добијамо тачку B, са $k(B,r)$ – добијамо тачку C, $k(C,r)$ – добијамо тачку A_2, такву да је $AA_2 = 2\,AA_1$. Ако сад поновимо поступак полазећи од дужи A_1A_2, добијамо тачку A_3 такву да је $A_1A_3 = 2\,A_1A_2$, односно $AA_3 = 3r$. Понављајући поступак $n-1$ пута добијамо $AA_n = nr$.

Доказ. Тачке A и A_2 су дијаметрално супротне тачке кружнице $k(A_1,r)$ па су, према томе, A, A_1 и A_2 колинеарне, односно и све тачке A_i ($i > 3$) припадају тој правој.

Сл. 7

Сл. 8

Задатак 6. Дате су три дужи a, b и c. Конструисати дуж x такву да је $a : b = c : x$.

Конструкција. Нека је O произвољна тачка у равни. Конструишимо две концентричне кружнице $k(O,a)$ и $k(O,b)$, сл. 8. На кружници $k(O,a)$ означимо произвољну тачку A, а затим одредимо и тачку C такву да је $AC = c$. Конструишимо сада две кружнице са тако одабраним полупречником d, $k(A,d)$ и $k(C,d)$. Оне секу кружницу $k(O,b)$ редом у тачкама B и D. Дуж BD је тражена дуж x.

Доказ. Троуглови OAB и OCD су подударни (имају све три подударне странице), па је $\angle AOB = \angle COD$. Одатле следи и једнакост $\angle AOC = \angle BOD$, па су једнакокраки троуглови $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$слични. Из њихове сличности следи пропорционалност страница, па је $OA : OB = AC : BD$, тј. $a : b = c : BD$, па је $BD = x$.

Дискусија. Наведену конструкцију можемо извести ако постоји тачка C, тј. ако је $c < 2a$. Ако ово није тачно, тј. $c \geqslant 2a$, конструисаћемо дуж na такву да је $c < 2na$. Сада можемо одредити тражену дуж x као четврту пропорционалу дужима na, nb и c. Важиће једнакост $na : nb = c : x$ а она је еквивалентна са $a : b = c : x$.

Задатак 7. Конструисати пресечну тачку двеју правих AB и CD које су задате са по две своје тачке.

Анализа. Дате су праве AB и CD и нека је X њихова пресечна тачка, сл. 9. Нека су C_1 и D_1 тачке симетричне тачкама C и D у односу на праву AB, и тачка E таква да је CC_1D_1E паралелограм. Посматрајмо сада троуглове DXD_1 и DCE. Они су слични, па је $DX : DC = DD_1 : DE$. Кад одредимо DX лако ћемо конструисати $\triangle DD_1X$: то је једнакокраки троугао, $XD = XD_1$ а тачке D и D_1 имамо.

Сл. 9

Сл. 10

Конструкција. Дате су четири тачке A, B, C и D. Конструишимо тачке C_1 и D_1 симетричне тачкама C и D у односу на праву AB. Конструишимо тачку E која је пресек кружница $k(C, CD)$ и $k(D_1, CC_1)$ такву да је CC_1D_1E паралелограм. Конструишимо, затим, дуж x такву да је $DD_1 : DE = x : DC$ (задатак 6). И на крају, пресек кружница $k(D, x)$ и $k(D_1, x)$ даје нам две тачке; означимо са X ону од њих која припада дужи CD.

Доказ. Тачке D и D_1 су симетричне у односу на праву AB. Пошто је $DX = D_1X$, тачка X припада симетрали AB дужи DD_1. Треба још показати да тачка X припада правој CD. Како је $DD_1 \parallel CC_1$ и $D_1E \parallel CC_1$, то је $DD_1 \parallel D_1E$, тј. тачке D, D_1 и E су колинеарне. Дуж x је по конструкцији таква да је $DE : DD_1 = DC : x$. У троугловима $\triangle DCE$ и $\triangle DXD_1$, за односе страница важи $DD_1 : DE = x : DC = DX : DC$ и $DD_1 : DE = x : DC = XD_1 : CE$, па су ти троуглови слични. Зато је $\angle CDE = \angle XDD_1$, па су тачке C, X и D колинеарне.

Дискусија. При конструкцији тачке E може да се деси да се она поклопи са тачком D – тада су праве AB и CD паралелне.

Показали смо како се изводе основне конструкције, а сада наводимо један пример.

Задатак 8. Поделити дату дуж AB на три једнака дела.

Конструкција. Дата је дуж AB, сл. 10. На правој AB конструишимо тачке C и D тако да је $CA = CB = BD = a$. Нека су E и E_1 пресечне тачке кружница $k(C,CB)$ и $k(D,DC)$, а тачке F и F_1 кружница $k(C,CD)$ и $k(D,DA)$. Тражене тачке X и Y добићемо у пресеку редом парова кружница $k(E,EC)$, $k(E_1,E_1C)$ и $k(F,FD)$, $k(F_1,F_1D)$.

Доказ. Пошто су тачке E и E_1 симетричне у односу на праву AB и $EC = E_1C$, тачка X припада правој AB; слично се доказује да је и Y на правој AB. Једнакокраки троуглови ECX и DEC су слични ($\angle ECA$ им је заједнички, што значи да имају све исте углове). Следи $CX : CE = CE : CD$, односно $CX : 2AB = 2AB : 3AB$, па је $CX = \frac{4}{3}AB$ односно $AX = \frac{1}{3}AB$. Симетрично добијамо да је $BY = \frac{1}{3}AB$.

Сл. 11

У посматраним геометријским конструкцијама једним шестаром ми нисмо имали никакво ограничење за дужине полупречника конструисаних кружница. Можемо конструисати кружнице колико хоћемо великих, односно малих полупречника. Међутим, кад изводимо конструкције практично, једним датим шестаром, ми можемо конструисати кружнице за чије полупречнике r важи $r_{min} < r < r_{max}$. Испитујући ове услове добијени су следећи резултати.

Све геометријске конструкције које се могу извести помоћу лењира и шестара, могу се извести само помоћу шестара конструишући кружнице чији полупречник r не прелази унапред дату величину, $0 < r \leqslant r_{max}$.

Све геометријске конструкције које се могу извести помоћу лењира и шестара, могу се извести само помоћу шестара конструишући кружнице чији полупречник r није мањи од унапред дате величине, $r_{min} \leqslant r$.

Ако фиксирамо полупречник, тј. конструишемо само кружнице константног полупречника, тада не можемо извести све конструкције.