НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

мр Гордана Ћетковић

ГЕОМЕТРИЈСКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ У КОЈИМА СЕ КОРИСТИ САМО ЛЕЊИР

Познато да је да се не може сваки конструктивни задатак решити помоћу лењира и шестара. На пример, не можемо конструисати квадрат чија је површина једнака површини јединичног круга, поделити дати угао на три једнака дела или конструисати правилан седмоугао.

Посматраћемо конструкције које могу бити изведене коришћењем лењира и шестара. Швајцарски математичар Јакоб Штајнер, сматрајући да је лењир најпрецизнији инструмент, доказао је 1833. године да сваки конструктивни задатак који може да се реши коришћењем лењира и шестара, може бити решен и коришћењем само лењира, ако је у равни цртежа дата једна кружница и њен центар. При томе се подразумева да је кружница конструисана ако је одређен њен центар и полупречник. Нешто раније, на сасвим други начин ову теорему је формулисао и француски математичар Ж. Понселе. Наведена теорема се назива теорема Понселе-Штајнера.

Навешћемо најпре неколико основних конструкција које се изводе коришћењем искључиво лењира, а подразумевају знање из геометрије које имају ђаци у основној школи.

1. *Дат је троугао ABC и тачке P и Q које су средишта редом његових страница AC и BC. Одредити средиште дужи AB.*

Решење. Дужи AQ и BP су тежишне линије троугла ABC, а њихова пресечна тачка T је тежиште троугла, слика 1. Правој CT припада трећа тежишна линија, па је пресек дужи AB и праве CT тражена тачка S, односно средиште дужи AB.

Сл. 1

Сл. 2

2. *Дата је дуж AB и њој паралелна права p. Конструисати средиште дате дужи.*

Анализа. Нека је ABC произвољан троугао, тачка S средиште дужи AB и p права паралелна са дужи AB таква да сече дужи CA, CS и CB редом у тачкама P, R и Q, слика 2. Лако се показује да је $PR \cong RQ$. Нека је тачка V пресек дужи AQ и SC. Докажимо да су тачке P, V, B на једној правој. Из сличности троуглова VAS и VQR следи $VS : VR = AS : QR = BS : PR$. Сада за $\triangle VSB$ и $\triangle VRP$ имамо $\angle S = \angle R$ и $SV : RV = SB : RP$ па су ови троуглови слични, одакле следи да је $\angle SVB = \angle RVP$. Дакле, показали смо колинеарност тачака P, V и B.

Конструкција. Дата је дуж AB и права p. Означимо са C неку тачку са оне стране праве p са које није AB. Нека су P и Q тачке пресека редом дужи CA и CB са правом p. Нека је V тачка пресека дужи AQ и BP. Права CV сече дуж AB у траженој тачки S.

Доказ. У анализи смо показали да су тачке C, R, V и S на једној правој. Да бисмо одредили праву потребне су нам две тачке. У конструкцији имамо тачке C и V. Дакле, права CV сече дужи PQ и AB у њиховим средиштима.

Дискусија. Ова конструкција је увек једнозначна и задатак има јединствено решење.

3. *Дата је дуж AB и њено средиште S. Кроз тачку M која не припада правој AB конструисати праву паралелну правој AB.*

Решење. На правој AM узмимо произвољну тачку C, слика 3. Нека је T пресечна тачка правих SC и BM, а N пресек правих AT и CB. Права MN је паралелна са AB.

Доказ. Претпоставимо да права која пролази кроз тачку M и паралелна је правој AB, сече праву BC у тачки N_1. Нека је $T_1 = AN_1 \cap BM$. Права CT_1 пролази кроз средиште дужи AB, тј. тачку S. Како је $T = BM \cap CS$ а $T_1 \in BM$ и $T_1 \in CS$, следи да је $T \equiv T_1$, тј. $N \equiv N_1$, па је $MN \parallel AB$. Решење је увек јединствено.

Сл. 3 Сл. 4

У наредним задацима подразумеваћемо да је у равни цртежа дата кружница k и њен центар O, као и да можемо конструисати само праву кроз две дате тачке.

4. *Конструисати правоугаоник уписан у дату кружницу k.*

Кроз тачку O конструишемо две разне праве p и q, и њихове пресечне тачке са кружницом k означимо редом са A, B и C, D, слика 4. Добијене тачке су темена правоугаоника.

5. *Конструисати квадрат уписан у кружницу k.*

Решење. Конструишимо, као у претходном задатку, правоугаоник $ABCD$ уписан у кружницу k, слика 5. Како је $CD \parallel AB$, можемо конструисати средиште P дужи AB (задатак 2). Слично, нека су Q, R, S средишта редом дужи BC, CD и DA. Праве PR и QS пролазе кроз средиште O правоугаоника и $PR \perp QS$. Њихове пресечне тачке са кружницом k су K, L, M и N и те тачке су темена квадрата.

Сл. 5

Сл. 6

6. *Кроз дату тачку M ван дате праве p конструисати праву паралелну правој p.*

Решење. Конструишимо правоугаоник $ABCD$ уписан у дату кружницу k (задатак 4). Права p не може бити паралелна са свим страницама паралелограма, па нека дуж AB није паралелна са p. Нека су P и Q средишта дужи AD и BC. Означимо са R, S и T тачке пресека праве p редом са паралелним правим AB, DC и PQ. Пошто је P средиште дужи AD, биће и тачка T средиште дужи SR. Сада (задатак 3) конструишемо праву m кроз тачку M паралелну правој p. Решење је јединствено.

7. *Кроз дату тачку M конструисати праву ортогоналну датој правој p.*

Решење. Конструишимо квадрат $ABCD$, слика 7 (задатак 5). Затим, кроз тачку O (пресек његових дијагонала) конструишимо праву q паралелну правој p (задатак 6) и нека је тачка Q пресек праве q са неком страницом квадрата, нпр. AB. Претпоставимо да је тачка Q различита од тачака A и B (ако би било нпр. $Q \equiv A$, тада би било $BD \perp p$). Конструишимо кроз тачку Q праву l такву да је $l \parallel AC$ (задатак 6). Другу пресечну тачку праве l са страницама квадрата означимо са L (нека је $L = BC \cap l$). Кроз тачку L конструишемо праву паралелну са AB (задатак 6) и њену пресечну тачку са страницом AD

означимо са R. Права OR је ортогонална на праву p. На крају, кроз тачку M конструишемо праву m паралелну правој OR; биће $m \perp p$.

Доказ. Из услова $l \parallel AC$ добијамо да је $BQ = BL$, а из услова $LR \parallel AB$ добијамо $LB = AR$. Дакле, $BQ = AR$. Поред тога, $OB = OA$ и $\angle OBQ = \angle OAR = 45^\circ$, па је $\triangle OBQ \cong \triangle OAR$, односно $\angle BOQ = \angle AOR$. Из свега овога закључујемо да је $\angle QOR = \angle BOA = 90^\circ$, дакле, да је $OR \perp q$, па ће и за праву $m \parallel OR$ важити $m \perp p$.

Решење је јединствено.

Сл. 7

Сл. 8

8. *Дата је дуж AB и права p и на њој тачка C. Конструисати тачку M на правој p такву да је $CM = AB$.*

Решење. Кроз тачку C конструишимо праву q паралелну правој AB, а затим кроз тачку B конструишемо праву l паралелну правој AC, и нека је $D = l \cap q$, слика 8. Нека је P једна од тачака пресека кружнице k и праве која пролази кроз O и паралелна је правој p. Нека су Q и R тачке пресека кружнице k и праве кроз O паралелне са q. Конструишимо праве m и n које пролазе кроз тачку D и паралелне су редом правим PQ и PR. Нека је $M = m \cap p$ и $N = n \cap p$, и то су тражене тачке.

Доказ. Из паралелограма $ABDC$ имамо да је $AB = CD$. $\triangle OPQ$ и $\triangle OPR$ су једнакокраки троуглови, тј. $OP = OQ = OR$. Како је $\triangle CMD \sim \triangle OPQ$ и $\triangle CDN \sim \triangle ORP$, биће и $\triangle CMD$ и $\triangle CDN$ једнакокраки троуглови, па је $CD = CM = CN$, односно $CM = CN = AB$. Задатак увек има два решења.