НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1999, XLIV, 3–4, стр. 12–14

др Бранислав Боричић

О МЕТОДУ СУПСТИТУЦИЈЕ

На самом почетку упозоравамо читаоца да се овдје ради о једној наизглед досадној и тривијалној теми. По ауторовом мишљењу, тема није тривијална, јер га је дугогодишњи рад у настави мотивисао на један чланак управо овакве садржине, а да ли је тема досадна, то је више индивидуална ствар и питање личног афинитета.

Као метод који даје очигледне резултате и битно олакшава израчунавања у одговарајућим случајевима, *супституција* (или *замјена*) се у градиву за средње школе упечатљиво и наглашено појављује у елементима интегралног рачуна. Практично, неке форме супституције, као сасвим јасне, појављују се и у материји која се обрађује у основној школи. Те форме супституције су толико једноставне да не захтијевају чак ни неки посебан осврт у вези њихове примјене. На примјер, када обављамо пробу да ли број 2 представља рјешење једначине $3x + 3 = 6x$, ми, просто, објаснимо ученику да се проба врши тако што *сва појављивања непознате величине* x *у датој формули замијенимо бројем* 2. Дакле, проба се практично састоји у израчунавању бројних вриједности израза који се појављују са лијеве и десне стране једнакости: $3 \cdot 2 + 3 = 6 \cdot 2$. У завршним разредима основне и првим средње школе, када се говори о појмовима сложене и инверзне функције, згодно је експлицитно се позвати на супституцију. На примјер, када желимо да покажемо да је функција $g(x) = x - 2$ инверзна функцији $f(x) = x + 2$, тј. да композиција $f \circ g$ представља идентичко пресликавање, чини се методички оправданим позвати у помоћ супституцију као међукорак: $t = g(x)$. Дакле, $f(t) = t + 2$, односно: $f(g(x)) = x - 2 + 2$, тј. $(f \circ g)(x) = x$.

Међутим, иако, бар према управо реченом, сасвим једноставна као метод, супституција крије и могућности грешке. У овом кратком осврту, анализираћемо неколико карактеристичних примјера погрешне примјене метода супституције, којих као наставници морамо бити свјесни, па на то непрекидно указивати и ученицима.

Најприје размотримо један, и то, ваљда, једини случај када супституција може да се примјењује без икаквих ограничења и бојазни да би могла дати погрешан закључак. То је онај случај који је садржан у самим аксиомама једнакости и који, грубо, каже да *једнаке величине можемо међусобно замјењивати*, а што се прецизније може изразити као:

$$\forall x \forall y (x = y \wedge A(x) \to A(x/y))$$

гдје је $A(x)$ било која формула у којој се промјенљива x појављује слободно, а $A(x/y)$ је формула настала од $A(x)$ истовременом замјеном свих слободних појављивања промјенљиве x промјенљивом y. Појам слободног појављивања промјенљиве биће илустрован у даљем дијелу текста, а претходно ћемо само констатовати како су, на примјер, уз претпоставку:

$$x = y$$

сваке двије од слиједећих формула

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + x &= 1 \\ x + x &= 1 \\ y + y &= 1 \end{aligned}$$

међусобно еквивалентне.

Ипак, изван математичког контекста, чак ни претпоставка о једнакости није довољна да би супституција била коректна. Наиме, познато је да се за планету Венеру користе још и називи: Вечерњача, Зорњача, Даница и Афродита. И мада се ту ради о једном те истом објекту, реченице: „Види се Вечерњача." и „Види се Зорњача." у себи носе двије потпуно различите информације. Прва, да је доба у које се реченица изговара вече, а друга, да је зора, док нам реченица „Види се Венера." ништа не говори о добу дана када је реченица исказана.

Објаснимо сада и појам *слободног појављивања промјенљиве.* У изразима

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn}{2^k} \quad \text{и} \quad \int_a^b x^2 y^2\, dx$$

појављивања промјенљивих n и x су, редом, *везана*, за разлику од промјенљивих k и y, која су, редом, *слободна.* Слично, у формулама:

$$\forall z (x^2 + z = 2) \quad \text{и} \quad \exists y (xy = 1)$$

појављивања промјенљивих z и y, редом, су *везана*, док су појављивања промјенљиве x у оба случаја *слободна.*

Везано појављивање промјенљиве има једно значајно својство, а то је да од њега не зависи вриједност израза или формуле у којој се појављује. Тако је:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn}{2^k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ki}{2^k} \quad \text{и} \quad \int_a^b x^2 y^2\, dx = \int_a^b z^2 y^2\, dz$$

односно:

$$\forall z (x^2 + z = 2) \leftrightarrow \forall y (x^2 + y = 2) \quad \text{и} \quad \exists y (xy = 1) \leftrightarrow \exists z (xz = 1)$$

Поред тога, везано појављивање промјенљиве може се супституисати новом промјенљивом која се разликује од свих промјенљивих које се појављују слободно. У супротном, у горњим примјерима, имамо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn}{2^k} \neq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kk}{2^k} \quad \text{и} \quad \int_a^b x^2 y^2\, dx \neq \int_a^b y^2 y^2\, dy$$

односно:

$$\forall z(x^2+z=2) \not\leftrightarrow \forall x(x^2+x=2) \quad \text{и} \quad \exists y(xy=1) \not\leftrightarrow \exists x(xx=1)$$

Слично важи и за супституцију слободне промјенљиве. Слободна појављивања промјенљиве можемо супституисати другом промјенљивом под условом да иста након обављене супституције не постаје везана. Наиме, из горњих примјера је јасно да у првом, другом, трећем и четвртом случају, не можемо извршити, редом, слиједеће супституције: k/n, y/x, x/z и x/y. Стога се у математичкој логици строго дефинише појам *израза слободног за супституцију дате промјенљиве у посматраној формули.* Чак се и међу аксиомама класичне логике предиката првог реда често налази и оваква формула (тзв. *аксиома супституције*)

$$\forall x A(x) \to A(x/t)$$

гдје је израз t слободан за промјенљиву x у формули A.

Размотримо шта би се десило са аксиомом супституције уколико супституција не би била извршена коректно. Рецимо да је формула $A(x)$ облика $\exists y(x<y)$ и да се иста односи на природне бројеве. Формула $\forall x A(x)$ би имала облик $\forall x \exists y(x<y)$ и то је, када су у питању природни бројеви, евидентно тачно тврђење. Међутим, уколико извршимо некоректну замјену промјенљиве x у формули $A(x)$ изразом y^2+1, који, пошто се промјенљива y појављује у $A(x)$ као везана, није слободан за промјенљиву x у формули $A(x)$, добијамо $\exists y(y^2+1<y)$, што, наравно, није тачно, па би изгледало да је аксиома оборена!

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[2] M. i S. Prešić, *Uvod u matematičku logiku*, Matematički institut SANU, Beograd, 1979.

[3] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Аддисон-Щеслеы, Реадинг, 1967.