др Милан Дрешевић

КВОЦИЈЕНТ ПРОСТОРИ[1]

Познато је ([1], стр. 197, пр. 14) да за сваки потпростор U коначно-димензионалног векторског простора V постоји бар један директни комплемент, тј. потпростор W од V такав да је $V = U \oplus W$. Ако је V унитаран простор, међу овим комплементима посебно се издваја један — ортогонални комплемент $U^\perp$ од U ([1], стр. 306, став 1), који бисмо, са доста права, могли посматрати као неку врсту „природног комплемента" од U. Ако V није унитаран, онда не постоји спонтан, очигледан начин селекције потпростора W који би био природан комплемент од U. Међутим, полазећи од V и U, може се конструисати нови векторски простор V/U, познат као „количник" од V и U, који ће играти улогу природног комплемента од U. Простор V/U није потпростор од V и тако не може, de facto, бити директни комплемент од U; али, он има кључно својство: изоморфан је са сваким потпростором W који је директни комплемент од U ([1], последица 4, став 3).

Лема 1. *Ако је U потпростор векторског простора V, релација $\sim$ дата са*

$$(\forall u, v \in V)\; u \sim v \iff u - v \in U$$

је релација еквиваленције на V. Класа еквиваленције вектора v је скуп

$$[v] = v + U = \{\, v + u \mid u \in U \,\}.^2 \tag{1}$$

Доказ. Рефлексивност: $u \sim u$ јер $u - u = 0 \in U$. Симетричност: ако $u \sim v$, тада $u - v \in U$ па, пошто је U потпростор од V, $v - u = -(u - v) \in U$ и, дакле, $v \sim u$. Транзитивност: ако $u \sim v$ и $v \sim w$, тада $u - v \in U$ и $v - w \in U$, па $u \sim w$, јер $u - w = (u - v) + (v - w) \in U$. Коначно, (1) следи из

$$w \in [v] \iff w \sim v \iff w - v \in U \iff (\exists u \in U)\, w = v + u \quad \blacksquare$$

Класе еквиваленције релације $\sim$ називају се *косети* од U у V. Скуп свих косета од U у V означавамо са V/U. Фамилија V/U је једна партиција скупа V.

[1] Овај чланак је мала модификација текста који је замишљен и писан као могући Додатак ауторовом уџбенику [1].

[2] Ако нема двосмислености, уместо прецизне ознаке $[v]_U$, пишемо краће $[v]$.

Пример 1. Очигледно:

(1) Ако је $U = \{0\}$, тада је $[v] = \{v\}$ за сваки $v \in V$.

(2) Ако је $U = V$, тада је $[v] = V$ за сваки $v \in V$.

Пример 2. Нека је $V = F^n$, U потпростор од V свих решења једначине

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \qquad (a_1, \ldots, a_n \in F)$$

и $v = (v_1, \ldots, v_n) \in F^n$. Тада је косет $[v] = v + U$ скуп свих решења једначине

$$a_1(x_1 - v_1) + \cdots + a_n(x_n - v_n) = 0 \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Заиста, за произвољан вектор $c = (c_1, \ldots, c_n) \in F^n$, имамо

$$c \in [v] \iff c \sim v \iff c - v \in U \iff a_1(c_1 - v_1) + \cdots + a_n(c_n - v_n) = 0.$$

Посебно, ако је, рецимо, $V = \mathbf{R}^2$, U простор решења једначине $3x - 2y = 0$ и $v = (1, -4) \in \mathbf{R}^2$, тада је U права кроз тачку $(0,0)$ нормална на вектор $n = (3, -2)$, док је $[v]$ скуп решења једначине $3(x-1)-2(y+4) = 0 \iff 3x-2y = 11$, тј. права кроз тачку $(1, -4)$ паралелна са U. Фамилију V/U чине све праве у $\mathbf{R}^2$ паралелне са U.

Став 1. *Нека је U потпростор векторског простора V над пољем F. Тада је скуп V/U свих косета од U у V такође векторски простор над F у односу на следеће операције векторског сабирања и множења скаларом:*

$$\begin{aligned} [v] + [w] &= [v + w] \quad \text{или} \quad (v + U) + (w + U) = (v + w) + U, \\ c[v] &= [cv] \qquad \text{или} \qquad c(v + U) = (cv) + U \quad (c \in F). \end{aligned}$$

Доказ. Пре свега, проверимо да су уведене операције добро дефинисане; наиме, независне од избора репрезентаната одговарајућих косета; тојест да:

1° $[v] = [v'] \wedge [w] = [w'] \implies [v + w] = [v' + w']$;

2° $[v] = [v'] \implies [cv] = [cv']$.

што је, према ([1], стр. 36, став 1), еквивалентно са

$$(1)\ v \sim v \wedge w \sim w' \implies v + w \sim v' + w'; \quad (2)\ v \sim v' \implies cv \sim cv'.$$

Заиста: (1) $v - v' \in U \wedge w - w' \in U \implies (v+w) - (v'+w') = (v-v') + (w-w') \in U$; (2) $v - v' \in U \implies cv - cv' = c(v - v') \in U$.

Сада је лако показати да су сви аксиоми векторског простора задовољени. Поменимо да је нула-вектор у V/U косет нула-вектора у V: $[0] = 0 + U = U$. ■

Векторски простор V/U назива се *квоцијент* или *количник* простора V и U. Простор V/U тесно је повезан са пресликавањем $q\colon V \to V/U$ дефинисаним са

$$q(v) = [v] = v + U \quad (v \in V)$$

које зовемо *природна пројекција* или *квоцијент пресликавање.* Очигледно, q је сурјекција и операције у V/U су управо тако дефинисане да је q морфизам:

$$q(cv + dw) = [cv + dw] = c[v] + d[w] = cq(v) + dq(w).$$

Дакле, q је епиморфизам. Запазимо да је језгро од q баш потпростор U, јер

$$v \in \operatorname{Ker}(q) \iff [v] = [0] \iff v \sim 0 \iff v \in U.$$

Специјално, ако је $U = \{0\}$, q је и мономорфизам. Вратимо се сад примеру 1.

Пример 3. Очигледно: (1) Ако је $U = \{0\}$, тада је $q\colon v \mapsto [v] = \{v\}$ изоморфизам са V на $V/U = \{\{v\} \mid v \in V\}$. (2) Ако је $U = V$, простор $V/U = \{V\}$ је нула-простор.

Наредно тврђење даје важну информацију о димензији квоцијент простора.

Став 2. *Нека је U потпростор коначно-димензионалног векторског простора V. Тада је квоцијент простор V/U коначно-димензионалан и важи формула*

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U.$$

Први доказ. Нека је $q\colon V \to V/U$ природна пројекција. Тада је $\operatorname{Ker}(q) = U$ и $\operatorname{Im}(q) = V/U$, па се, на основу ([1], стр. 214, став 5) добија

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(q) + \dim \operatorname{Im}(q) = \dim U + \dim(V/U).$$

Упутство за други доказ. Ако је $U = \{0\}$ или $U = V$, доказ је тривијалан. У супротном, проширите базу $(u_1, \dots, u_r)$ од U до базе $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$ од V и покажите да је $([v_1], \dots, [v_s])$ база од V/U. ■

Пример 4. Нека је $V = F_n$ и U потпростор од V који чине симетричне матрице. Тада, $\dim V = n^2$, $\dim U = \frac{1}{2}n(n+1)$ ([1], пример III.3.6.7), па $\dim(V/U) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Пример 5. Нека је $V = \mathbf{R}_n[x]$ и U потпростор од V свих полинома $p \in V$ таквих да је $p(0) = p(1) = 0$. Тада, $\dim V = n+1$, $\dim U = n-1$ (зашто?), па $\dim(V/U) = 2$.

Пример 6. Ако је $V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \to \cdots \to V_{n-1} \xrightarrow{f_n} V_n$ низ коначно-димензионалних векторских простора и морфизама и $f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ композиција морфизама f_i, тада

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \dim(V_i/\operatorname{Im}(f_i)) - \sum_{i=1}^{n} \dim \operatorname{Ker}(f_i) &= \dim V_n - \dim V_0 \\ &= \dim(V_n/\operatorname{Im}(f)) - \dim \operatorname{Ker}(f).\end{aligned}$$

Да бисмо ово доказали, довољно је збиру једнакости

$$\dim V_{i-1} = \dim \operatorname{Ker}(f_i) + \dim \operatorname{Im}(f_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

додати $\dim V_n$, применити Став 2 и користити формулу $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$.

Последица 1. *Нека су U и W потпростори коначно-димензионалног векторског простора V такви да је $U \subset W \subset V$. Тада важи једнакост*

$$\dim(V/U) = \dim(W/U) + \dim(V/W).$$

Доказ. $\dim(W/U) + \dim(V/W) = (\dim W - \dim U) + (\dim V - \dim W) = \dim V - \dim U = \dim(V/U)$. ■

Последица 2. *Под условима Последице 1, W/U је потпростор од V/U и*

$$(V/U)/(W/U) = V/W.$$

Доказ. Сваки косет $w+U$ од U у W је и косет од U у V, пошто $w \in W \implies w \in V$; отуда $W/U \subset V/U$. Даље, ако су w_1+U и w_2+U косети од U у W, онда је то и њихова линеарна комбинација $(c_1w_1 + c_2w_2)+U$, пошто је W потпростор од V; отуда, W/U је потпростор од V/U. Према Ставу 2 и Последици 1,

$$\dim(V/U)/(W/U) = \dim(V/U) - \dim(W/U) = \dim(V/W),$$

одакле следи закључак на основу ([1], стр. 213, последица 2). ■

Пример 7. Нека су U и W потпростори коначно-димензионалног векторског простора $V = F_n$ свих скаларних и дијагоналних матрица. Тада је $U \subset W \subset V$, па

$$(V/U)/(W/U) \cong V/W.$$

Пример 8. Ако су U и W потпростори векторског простора V такви да је $V = U + W$ и $Z = U \cap W$, тада је $V/Z = (U/Z) \oplus (W/Z)$ (независно од димензије простора V).

Пре свега, како је $Z \subset U \subset V$ и $Z \subset W \subset V$, према Последици 2, U/Z и W/Z су потпростори од V/Z. Нека је, даље, $[v] = v + Z \in V/Z$. Пошто је $V = U + W$, то је $v = u + w$ са $u \in U$, $w \in W$. Отуда, $[v] = [u] + [w]$, где $[u] \in U/Z$, $[w] \in W/Z$. Дакле, $V/Z = U/Z + W/Z$. Да је ова сума директна, казује следећи импликацијски ланац:

$$\begin{aligned}[v] \in U/Z \cap W/Z &\implies [v] \in U/Z \wedge [v] \in W/Z \implies v \in U \wedge v \in W \\ &\implies v \in U \cap W = Z \implies [v] = [0].\end{aligned}$$

Последица 3. *Нека су U и W потпростори коначно-димензионалног векторског простора V. Тада је U потпростор од $U+W$, $U \cap W$ потпростор од W, при чему су одговарајући квоцијент простори изоморфни:*

$$(U+W)/U \cong W/(U \cap W).$$

Доказ. Према Ставу 2 и Грасмановој формули ([1], стр. 196, став 5), имамо

$$\dim(U+W)/U = \dim(U+W) - \dim U = \dim W - \dim(U \cap W) = \dim W/(U \cap W),$$

што је еквивалентно жељеном изоморфизму. ■

Пример 9. Зна се ([1], стр. 182, пример 1) да је коначно-димензионални векторски простор $V = F_n$ сума својих потпростора U и W горњих и доњих троугаоних матрица и $Z = U \cap W$ простор дијагоналних матрица. Отуда, $V/U \cong W/Z$.

Последица 4. *Ако су U и W потпростори коначно-димензионалног векторског постора V такви да је $V = U \oplus W$, тада је $V/U \cong W$.*

Доказ. $V = U \oplus W \implies \dim V = \dim U + \dim W \implies \dim(V/U) = \dim W \implies V/U \cong W$. ∎

Пример 10. Зна се ([1], стр. 183, пр. 5) да је коначно-димензионални векторски простор $V = F_n$ директна сума својих потпростора U и W симетричних и кососиметричних матрица. Отуда, $V/U \cong W$.

Последица 5. *Ако је $f\colon V \to W$ морфизам векторских простора V, W и V коначно-димензионалан, тада је $V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$.*

Доказ. $\dim V = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) \implies \dim(V/\operatorname{Ker}(f)) = \dim \operatorname{Im}(f) \implies V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$. ∎

Пример 11. Ако је D ендоморфизам диференцирања коначно-димензионалног векторског простора $V = \mathbf{R}_n[x]$, тада $\operatorname{Ker}(D) = \mathbf{R}_0[x]$, $\operatorname{Im}(D) = \mathbf{R}_{n-1}[x]$, па

$$\mathbf{R}_n[x]/\mathbf{R}_0[x] \cong \mathbf{R}_{n-1}[x].$$

У наредна два става уопштавамо тврђења Последица 4 и 5 ослобађајући их од претпоставке о димензији простора V.

Став 3. *Нека су U и W потпростори векторског простора V. Тада, $V = U \oplus W$ ако и само ако рестрикција $q|W\colon W \to V/U$ природне пројекције $q\colon V \to V/U$ је изоморфизам.*

Доказ. Нека је $V = U \oplus W$. Пошто је $q|W$ морфизам, треба још показати да је и бијекција. $q|W$ је инјекција: Нека $w_1, w_2 \in W$ и $q(w_1) = q(w_2)$. Тада $q(w_1 - w_2) = 0$, па $w_1 - w_2 \in \operatorname{Ker}(q) = U$. Како $w_1 - w_2 \in W$, то $w_1 - w_2 \in U \cap W = \{0\}$, па $w_1 = w_2$. $q|W$ је сурјекција: Нека $z \in V/U$. Пошто је q сурјекција, $q(v) = z$ за неки $v \in V$. Али, $V = U + W$, па $v = u + w$ са $u \in U$, $w \in W$. Отуда, $z = q(u) + q(w) = q(w)$.

Обратно, нека је $q|W$ изоморфизам. Тада, $V = U + W$. Заиста, ако $v \in V$, онда $[v] = q(w) = [w]$ за неки $w \in W$, јер је $q|W$ сурјекција. Значи, $v \sim w$ и, стога, $u = v - w \in U$, одакле $v = u + w$. Сем тога, $U \cap W = \{0\}$. Заиста, ако $v \in U \cap W$ и $v \neq 0$, онда $q(v) \neq q(0) = U$, јер $v \in W$ и $q|W$ је инјекција. Али, $v \in U \implies q(v) = U$. Апсурд! ∎

Примедба 1. Уочимо са Став 3, заправо, каже да је W директни комплемент од U ако и само ако W садржи тачно један елемент из сваког косета од U.

Примедба 2. Став 2 може се извести из Става 3: Нека је U потпростор коначно-димензионалног простора V. Ако је W било који директни комплемент од U, тада је $V = U \oplus W$ и $\dim V = \dim U + \dim W$. Према Ставу 3, $V/U \cong W$. Отуда је V/U коначно-димензионалан и $\dim(V/U) = \dim W = \dim V - \dim U$.

Пример 12. Зна се ([1], стр. 182, пр. 3) да је бесконачно-димензионални векторски простор $V = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ директна сума својих потпростора U и W парних и непарних функција. Отуда, $V/U \cong W$.

Став 4. *Ако је* $f\colon V \to W$ *морфизам векторских простора* V *и* W, *тада је*

$$V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f).$$

Доказ. Ставимо $U = \operatorname{Ker}(f)$, $Z = \operatorname{Im}(f)$ и дефинишимо $g\colon V/U \to Z$ са $g([v]) = f(v)$. Тада, g је једна добро дефинисана инјекција, јер, за све $u, v \in V$, имамо

$$\begin{aligned}[u] = [v] &\iff u \sim v \iff u - v \in U \iff f(u - v) = 0\\ &\iff f(u) = f(v) \iff g([u]) = g([v]).\end{aligned}$$

Како је $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f) = Z$, g је сурјекција. Очито, g је морфизам јер је то f. ■

Примедба 3. У ознакама Става 4, нека је $q\colon V \to V/U$ природна пројекција и $i\colon Z \to W$ инклузија, тј. $i(z) = z$. Тада, $f = i \circ g \circ q$ (види дијаграм). Заиста, за $v \in V$,

$$(i \circ g \circ q)(v) = (i \circ g)([v]) = i(f(v)) = f(v).$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & W \\ V/U \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Пример 13. Ако је D ендоморфизам диференцирања бесконачно-димензионалног векторског простора $V = \mathbf{R}[x]$, тада је $\operatorname{Ker}(D) = \mathbf{R}_0[x]$, $\operatorname{Im}(D) = \mathbf{R}[x]$, па $\mathbf{R}[x]/\mathbf{R}_0[x] \cong \mathbf{R}[x]$.

Последица 6. *Нека су* U *и* W *потпростори векторског простора* V. *Тада*

$$(U + W)/U \cong W/(U \cap W).$$

Доказ. Нека је $q\colon V \to V/U$ природна пројекција, $f\colon W \to V/U$ њена рестрикција $q|W$. Тада, $\operatorname{Ker}(f) = U \cap W$, јер, $(\forall v \in W)\, v \in \operatorname{Ker}(f) \iff [v] = [0] \iff v \in U$. Даље,

$$\begin{aligned}&(\forall v \in V)\, [v] \in \operatorname{Im}(f) \iff (\exists w \in W)\, [v] = [w] \iff (\exists w \in W)\, v - w \in U\\ &\iff (\exists u \in U)(\exists w \in W)\, v = u + w \iff v \in U + W \iff [v] \in (U + W)/U.\end{aligned}$$

Дакле, $\operatorname{Im}(f) = (U + W)/U$. Остаје да се примени Став 4. ■

Последица 7. *Нека су* U *и* W *потпростори векторског простора* V *и* $U \subset W \subset V$. *Тада,*

$$(V/U)/(W/U) \cong V/W.$$

Доказ. Функција $f\colon V/U \to V/W$ дата са $[v]_U = v + U \mapsto v + W = [v]_W$ за сваки $v \in V$ је добро дефинисана:

$$[v]_U = [v']_U \implies v - v' \in U \implies v - v' \in W \implies [v]_W = [v']_W.$$

f је морфизам:

$$f(c[v]_U) = f([cv]_U) = [cv]_W = c[v]_W = cf([v]_U),$$
$$f([v]_U + [v']_U) = f([v+v']_U) = [v+v']_W = [v]_W + [v']_W = f([v]_U) + f([v']_U).$$

Очигледно, f је сурјекција, $\mathrm{Im}(f) = V/W$, са језгром $\mathrm{Ker}(f) = W/U$, јер

$$[v]_U \in \mathrm{Ker}(f) \iff [v]_W = [0]_W \iff v \in W \iff [v]_U \in W/U.$$

Остаје да се примени Став 4. ■

Упоредите доказе Последица 6 и 7 са доказима Послдица 3 и 2.

Примедба 4. Став 4 и Последице 6, 7 називају се често „прва“, „друга“, односно „трећа теорема о изоморфизму“, респективно.

Наредни „став о кореспонденцији“ описује конструкцију фамилије свих потпростора датог квоцијент простора.

Став 5. (1) *За сваки потпростор W^* квоцијент простора V/U постоји тачно један потпростор W од V такав да је $U \subset W \subset V$ и $W^* = W/U$.*

(2) *Ако су Z, W потпростори од V који садрже U и Z^*, W^* кореспондентни потпростори од V/U, тада $Z \subset W \iff Z^* \subset W^*$ и $W^*/Z^* \cong W/Z$.*

Дакле, корсепонденција $W \mapsto W^*$ дефинише бијекцију са скупа свих потпростора од V који садрже U на скуп свих потпростора од V/U.

Доказ. (1) Посматрајмо подскуп W простора V дефинисан са

$$W = \{\, v \in V \mid [v] = v + U \in W^* \,\}.$$

Пошто је W^* потпростор од V/U, лако је видети да је W потпростор од V. Штавише, $U \subset W$:

$$v \in U \implies [v] = [0] \in W^* \implies v \in W.$$

Даље, $W^* = W/U$: $(\forall v \in V)([v] \in W^* \iff v \in W \iff [v] \in W/U)$. Јединственост: Нека је и Z потпростор од V такав да је $U \subset Z$ и $W^* = Z/U$. Тада,

$$\begin{aligned} Z/U = W/U &\iff (\forall v \in V)([v] \in Z/U \iff [v] \in W/U) \\ &\iff (\forall v \in V)(v \in Z \iff v \in W) \iff Z = W. \end{aligned}$$

(2) $Z \subset W \iff (\forall v \in V)(v \in Z \iff v \in W) \iff (\forall v \in V)([v] \in Z^* \implies [v] \in W^*) \iff Z^* \subset W^*$. По Последици 6, $W^*/Z^* = (W/U)/(Z/U) \cong W/Z$. ■

Став 6. *Нека су, респективно, U и Z потпростори векторских простора V и W и $f\colon V \to W$ морфизам такав да је $f^{\to}(U) \subset Z$. Тада, за сваки $v \in V$, кореспонденција*

$$[v]_U = v + U \mapsto f(v) + Z = [f(v)]_Z$$

дефинише (коректно) морфизам $\bar{f}\colon V/U \to W/Z$ (за који се каже да је *индукован* на квоцијент просторима морфизмом f). *При томе, ако су* $p\colon V \to V/U$ *и* $q\colon W \to W/Z$ *природне пројекције, онда је* $q \circ f = \bar{f} \circ p$ (видети дијаграм).

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ V/U & \xrightarrow[\bar{f}]{} & W/Z \end{array}$$

Доказ. Прво, како је $f^{\to}(U) \subset Z$, $\bar{f}$ је коректно дефинисана, јер:

$$[v]_U = [v']_U \implies v - v' \in U \implies f(v) - f(v') \in Z \implies [f(v)]_Z = [f(v')]_Z.$$

(Пошто нема забуне, даље изостављамо индексе U и Z на оригиналу и слици.) $\bar{f}$ је морфизам, јер, за све скаларе $a, b \in F$ и векторе $u, v \in V$, имамо:

$$\begin{aligned} \bar{f}(a[u] + b[v]) &= \bar{f}([au + bv]) = [f(au + bv)] = [af(u) + bf(v)] \\ &= a[f(u)] + b[f(v)] = a\bar{f}(u) + b\bar{f}(v). \end{aligned}$$

Коначно, једнакост $q \circ f = \bar{f} \circ p$, тј. комутативност горњег дојаграма, следи из

$$(q \circ f)(v) = q(f(v)) = [f(v)] = \bar{f}([v]) = \bar{f}(p(v)) = (\bar{f} \circ p)(v). \quad \blacksquare$$

Примедба 5. (1) Ако је f епиморфизам, онда је и $\bar{f}$ епиморфизам: f епи $\implies q \circ f$ епи $\implies \bar{f} \circ p$ епи $\implies \bar{f}$ епи. ([1], стр. 56, пр. 8).

(2) Ако је $U = \mathrm{Ker}(f)$ и $Z = \{0\}$, онда је $\bar{f}$ мономорфизам:

$$\begin{aligned} (\forall u, v \in V)\, \bar{f}([u]) = \bar{f}([v]) &\implies [f(u)] = [f(v)] \implies f(u) - f(v) \in Z = \{0\} \\ &\implies f(u - v) = 0 \implies u - v \in \mathrm{Ker}(f) = U \implies [u] = [v]. \end{aligned}$$

Примедба 6. Став 4 ($f \in \mathrm{Mor}(V, W) \implies V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$) је последица Става 6: Посматрајмо функцију $f^{+}\colon V \in \mathrm{Im}(f)$ дефинисану са $f^{+}(v) = f(v)$ за сваки $v \in V$. Очигледно, f^{+} је епиморфизам и $\mathrm{Ker}(f^{+}) = \mathrm{Ker}(f)$. За потпростор $U = \mathrm{Ker}(f^{+})$ од V и $Z = \{0\}$ од $\mathrm{Im}(f)$ је $(f^{+})^{\to}(U) = Z$. На основу Примера 3, $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Im}(f)/Z$. Према Ставу 6 и Примедби 6, индуковани морфизам $\overline{(f^{+})}\colon V/\mathrm{Ker}(f^{+}) \to \mathrm{Im}(f)/\{0\}$ је изоморфизам, па $V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$, на основу транзитивности релације $\cong$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Drešević, *Elementi linearne algebre*, Kultura, Beogard 1995.
2. K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall editions, New Jersey 1971.
3. J. Rotman, *Galois Theory*, Springer-Verlag, New York 1990.