Б. Војводић, В. Говедарица, М. Јовановић

НЕКИ ДЕТАЉИ У ВЕЗИ СА ПОБОЉШАЊЕМ НАСТАВЕ АНАЛИЗЕ

1. Прекиди функција

Нека је $\mathrm{Dom}(f) = [a, b]$, $a < b$. Каже се да је $c \in (a, b)$ тачка прекида прве врсте функције f ако постоје коначни лимеси $f(c-0)$ и $f(c+0)$ и вриједи

$$f(c-0) \neq f(c) \vee f(c+0) \neq f(c). \tag{1}$$

Ако је $a = c$, онда се (1) замјењује са

$$f(a+0) \neq f(a), \tag{2}$$

а за $c = b$ са

$$f(b-0) \neq f(b). \tag{3}$$

Ако бар један од лимеса $f(c-0)$, $f(c+0)$ не постоји или није у $\mathbf{R}$, каже се да је $c \in [a, b]$ тачка прекида друге врсте.

Теорема 1. *Монотона функција је непрекидна или има само тачке прекида прве врсте.*

Доказује се да монотона функиција има највише пребројиво много тачака прекида [2, 106].

Појам прекидности овдје посматрамо и због тога што су у вези са њим честе омашке, чак и у познатим уџбеницима математичке анализе (ово није случај са цитираном литературом). Тако се може наћи да Дирихлеова[1] функција

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{за } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

у свакој тачки има прекид прве врсте, а да функција

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \dfrac{1}{x}, & \text{за } x \neq 0, \\ \text{произвољно}, & \text{за } x = 0 \end{cases}$$

има прекид у $x = 0$ друге врсте. Управо је обрнуто.

[1] Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859)

Примјер 1. Дирихлеова функција D има у свакој тачки прекид друге врсте.

Заиста, нека је $x \in \mathbf{Q}$. Тада је $x + \dfrac{1}{n} \in \mathbf{Q}$, $x + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbf{Q}$ и $D\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, $D\left(x + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0$ па не постоји $D(x+0)$. Ако $x \notin \mathbf{Q}$, онда је $D\left(x - \dfrac{1}{n}\right) = 0$ и $D\left(\dfrac{[nx]}{n}\right) = 1$. Како је $x - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{[nx]}{n} \leqslant x$, то $\dfrac{[nx]}{n} \to x$. Дакле, не постоји $D(x-0)$.

2. Теореме о међувриједностима функција

Важна особина функције f из $C[a,b]$ је да узима све међувриједности, тј. да за сваки број z који је између $f(a)$ и $f(b)$ постоји $c \in [a,b]$ такав да је $f(c) = z$. Иако је интуитивно јасно о чему се ради, овим није прецизно исказана теорема. Сметњу чини појам међувриједност, однодно бити између (посебно се не дефинишу, а за то нема ни потребе). Природно је (а на то се и мисли) да је број z између бројева u и v ако је

$$u < z < v \quad \text{или} \quad v < z < u.$$

Замјене за ову дисјункцију су

$$\min\{u,v\} < z < \max\{u,v\},$$

$z \in (u,v) \cup (v,u)$, односно $(v-z)(u-z) < 0$.

Формулишимо сада теорему о међувриједностима непрекидне функције (Теорема о промежуточном значении (рус.), Intermediate value theorem (енгл.)) познату и као Болцано-Кошијева[2] теорема.

Теорема 2. *Нека је f непрекидна функција на $[a,b]$. Тада за сваки $z \in \mathbf{R}$ вриједи*

$$\min\{f(a), f(b)\} < z < \max\{f(a), f(b)\} \implies (\exists c \in (a,b))\, z = f(c).$$

Можемо писати и овако

Теорема 2′. $f \in C[a,b]$, $x \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a)) \implies z \in f((a,b))$.

Јасно је да тврђење остаје на снази и ако су сви интервали затворени, па користећи само симболе имамо, на примјер

Теорема 2″.

$$f \in C[a,b] \implies ((\forall z \in \mathbf{R})(f(a)-z)(f(b)-z) \leqslant 0 \implies z \in f([a,b])).$$

Узимајући у претходној формули, специјално, $z = 0$ (и искључујући случај $f(a)f(b) = 0$, за који је тачност импликације очигледна), добија се важна чињеница

$$f \in C[a,b] \implies (f(a)f(b) < 0 \implies 0 \in f((a,b))).$$

[2]Bolzano, Bernhard (1781–1848), Cauchy, Augustin Loius (1789–1857)

Посљедица наведене Болцано-Кошијеве теореме је да је непрекидна слика интервала опет интервал, тј.

$$f \in C(I) \implies f(I) \text{ је интервал.} \tag{4}$$

За доказе видјети [1, 166].

Придружујући неком математичком објекту (појму) објекат (појам) исте врсте, природно је уочавати заједничне или сличне особине (говори се и о насљедности особина). Тако, на примјер, изводна функција f' насљеђује периодичност, али не и непрекидност (диференцијабилне) функције f. Исто тако, за f' вриједи теорема о међувриједностима [1, 199]. Занимљиво, при том није потребно да је f' непрекидна функција. Овдје ћемо дати доказ који је модификација доказа из [2, 118].

Теорема 3. (Дарбу[3])

$$f \in D[a,b], \quad (f'(a)-z)(f'(b)-z) \leqslant 0 \implies z \in f'([a,b]).$$

Доказ. Функција g дефинисана са

$$g(x) = \begin{cases} f'(a), & \text{за } x = a, \\ \dfrac{f(2x-a)-f(a)}{2x-2a}, & \text{за } a < x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{f(b)-f(2x-a)}{2b-2x}, & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \leqslant x < b, \\ f'(b), & \text{за } x = b, \end{cases}$$

је непрекидна на $[a,b]$, па према Болцано-Кошијевој теореми из

$$(f'(a)-z)(f'(b)-z) = (g(a)-z)(g(b)-z) \leqslant 0$$

слиједи $z \in g([a,b])$. Даље, према Лагранжовој теореми (о средњој вриједности), за сваки $x \in [a,b]$ постоји $\theta \in [a,b]$ такав да је $g(x) = f'(\theta)$, одакле слиједи $g([a,b]) \subset f'([a,b])$.

Дакле, вриједи $z \in f'([a,b])$. ■

Слично формули (4) вриједи

$$f \in D(I) \implies f'(I) \text{ је интервал.}$$

3. Неке примјене Дарбуове теореме

У уџбеницима математичке анализе, и када се наводи, Дарбуова теорема се обично не користи. Овдје ћемо, на пар примјера, илустровати примјену ове теореме при доказивању неких класичних резултата.

Сљедеће тврђење показује да не може свака функција која је дефинисана на интервалу бити изводна.

[3] Darboux, Jean Gaston (1842–1917)

Теорема 4. *Ако је $f \in D[a,b]$, онда f' нема на $[a,b]$ прекиде прве врсте.*

Доказ. Нека је $c \in [a,b)$ тачка прекида прве врсте и, нпр. $f'(c) < f'(c+0)$. Остали случајеви из (1), (2), као и $c = b$ разматрају се слично. За произвољан $z \in (f'(c), f'(c+0))$ постоји $\varepsilon > 0$ такав да је $(c, c+\varepsilon] \subset (c,b)$ и за сваки $x \in (c, c+\varepsilon]$ је $z < f'(x)$. Заиста, у супротном би постојао низ $x_n \in (c, c+1/n]$ такав да је $z \geqslant f'(x_n)$, тако да би било $z \geqslant f'(c+0)$, што није тачно.

Дакле, вриједи $(f'(c+\varepsilon) - z)(f'(c) - z) < 0$ и $z \notin f'([c, c+\varepsilon])$, а то се коси са Дарбуовом теоремом. ■

Сљедећи резултати односе се на конвексне функције. Каже се да је функција f конвексна на интервалу I ако за произвољне $x, y \in I$ и $\lambda \in [0,1]$ вриједи

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{6}$$

Ако за $x \neq y$ и $\lambda \in (0,1)$ у (6) умјесто знака $\leqslant$ стоји $<$, каже се да је f строго конвексна на I. Функција f је конкавна (строго конкавна) на I ако је $-f$ конвексна (строго конвексна) на I.

Теорема 5. *$f \in C[a,b]$, f конвексна на $[a,b]$ $\implies$ постоји $c \in [a,b]$ такав да f опада на $[a,c]$ и расте на $[c,b]$.*

Доказ (уз диференцијабилност функције f). Ако је $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) на (a,b), онда је f строго опадајућа (строго растућа) на (a,b). У трећем случају постоје $x, y \in (a,b)$ такви да је $f'(x) \leqslant 0$ и $f'(y) \geqslant 0$, па по Дарбуовој теореми постоји $c \in (a,b)$ такав да је $f'(c) = 0$. Пошто је f конвексна, то f' расте, па је на $[a,c]$ $f'(x) \leqslant 0$, а на $[c,b]$ $f'(x) \geqslant 0$. ■

Примједба. Без услова диференцијабилности доказ је сложенији. Обрнута импликација, у општем случају, не вриједи. Међутим, уз непрекидност, закључак у теореми 5 еквивалентан је са:

за произвољне $x, y \in [a,b]$ и $\lambda \in [0,1]$ вриједи

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}.$$

Уз диференцијабилност и овдје је доказ једноставан.

Теорема 6. *Нека је f два пута диференцијабилна функција на (a,b) и $c \in (a,b)$. Ако је f конвексна на (a,c) и конкавна на (c,b), тада је $f''(c) = 0$.*

Доказ. Ако f није строго конвексна на (a,c) или није строго конкавна на (c,b), тврђење је јасно. Уз строгу конвексност, односно строгу конкавност је $f''(x) > 0$ на (a,c) и $f''(x) < 0$ на (c,b). па по Дарбуовој теореми мора бити $f''(c) = 0$. ■

Нека је $f \in D[a,b]$. Тачка $c \in (a,b)$ је превојна тачка функције f ако при проласку кроз c f мијења строгу конвексност у строгу конкавност или обрнуто. Дакле, ако је f два пута диференцијабилна функција на (a,b) и c ($c \in (a,b)$) превојна тачка функције f, онда је $f''(c) = 0$.

Обрнуто не мора да вриједи. На примјер, за функцију

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \leqslant 0, \\ x^4, & \text{за } x > 0, \end{cases}$$

је $f''(0) = 0$, али 0 није превојна тачка функције f.

4. Постојање неодређеног интеграла

Када се дефинише неки појам, пожељно је расправити његово постојање као и инсистирати на његовој природи. Тако, на примјер, да би се истакло да је неодређени интеграл скуп (свих примитивних функција), добро је користити записе

$$\int f = \{\, F \mid F' = f \,\},$$

$$F \in \int f \iff F' = f.$$

Сада је јасно да формула (која се обично узима очигледном)

$$\int cf = c \int f, \quad c \in \mathbf{R}$$

није тачна. Заиста, за $c = 0$ вриједи $\int 0 \cdot f = C$, гдје је C скуп константних функција, док је $0 \cdot \int f = \{0\}$ или је $0 \cdot \int f = \varnothing$.

Неодређени интеграл $\int f$ увијек постоји, а може бити (ако f нема примитивну функцију) празан скуп. У Теорији скупова доказује се да постоји, и то само један, празан скуп. Дакле, треба говорити о непразности скупа $\int f$.

Ако се неодређени интеграл $\int f$ посматра на интервалу, из теореме 4 директно се добија

$$\int f \neq \varnothing \implies f \text{ је непрекидна или } f \text{ има само прекиде друге врсте,} \tag{7}$$

односно

$$(f \text{ има прекид прве врсте}) \implies \int f = \varnothing. \tag{8}$$

Примјер 2. $\int [x]\, dx = \varnothing$, $x \in [1,2]$, док је $\int [x]\, dx = x + C$, $x \in [1,2)$.

За импликацију супротну од (7) имамо сљедеће:

$$f \in C(I) \implies \int f \neq \varnothing.$$

(Ово се доказује у сваком курсу Анализе I, видјети [2, 241].)

Ако f има прекиде друге врсте, постоје разне могућности, што показују наредни примјери.

Примјер 3. За Дирихлеову функцију $D(x)$, видјели смо да је сваки $x \in \mathbf{R}$ тачка прекида друге врсте. Међутим, она нема примитивну функцију (на произвољном интервалу $I \subset \mathbf{R}$). Заиста, ако би постојала F таква да је $F' = D$ на неком интервалу I, према (6) би $D(I) = \{0,1\}$ морао бити интервал. Дакле, $\int D(x)\,dx = \varnothing$, $x \in I$.

Примјер 4. За функцију

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{за } x \neq 0, \\ 0, & \text{за } x = 0, \end{cases}$$

примитивна је

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{за } x \neq 0, \\ 0, & \text{за } x = 0, \end{cases}$$

иако f има у нули прекид друге врсте. Овдје је $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x \in \mathbf{R}$.

На крају, наведимо да из теореме 1 и (7) слиједи

$$f \text{ монотона на } I, \ \int f \neq \varnothing \implies f \text{ непрекидна на } I.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marjanović, M., *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd 1979.

[2] Рудин, У., *Основы математического анализа*, Мир, Москва 1976. (у оригиналу: Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York 1964.)

ОБАВЕШТЕЊЕ

50 ГОДИНА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

У јануару 1998. године навршиће се 50 година од оснивања Друштва математичара Србије. Централна прослава овог јубилеја предвиђа се за време Републичког семинара о настави математике и рачунарства.