Никола Александров

АРИТМЕТИЧКИ НИЗ

Час обраде у III разреду Гимназије у Босилеграду

1. Уводни део часа (5 минута). Проверавамо домаће задатке. Понављамо основне појмове о низовима (дефиниција, начини задавања, ограниченост, монотоност); посебно се задржавамо на појму индекса члана низа; уочавамо суседне чланове, члан који претходи неком члану низа.

2. Главни део часа (30 минута). Истичемо циљ часа: упознаћемо се са аритметичким низом и неким његовим својствима.

Професор. Пођимо од неколико једноставних примера низова, задатих формулом општег члана: $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$; $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $c_n = 2n+3$; $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $d_n = -3n+14$. Уочавамо да је

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbf{N}} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right),\\
(b_n)_{n\in\mathbf{N}} &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right),\\
(c_n)_{n\in\mathbf{N}} &= (5, 7, 9, 11, \dots),\\
(d_n)_{n\in\mathbf{N}} &= (11, 8, 5, 2, -1, \dots).
\end{aligned}$$

Имају ли они неко од споменутих својстава (ограниченост, монотоност)?

Ученик 1. Низ (a_n) је ограничен, јер постоје бројеви $g = \dfrac{1}{2}$, $G = 1$, такви да је за све $n \in \mathbf{N}$ испуњено $\dfrac{1}{2} \leqslant a_n < 1$. Тај је низ строго растући, јер је за све $n \in \mathbf{N}$ испуњено

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0,$$

дакле, $a_{n+1} > a_n$.

Ученик 2. Низ (b_n) је ограничен, јер постоје бројеви $g = 0$, $G = 1$, такви да је за све $n \in \mathbf{N}$ испуњено $0 < b_n \leqslant 1$. Он је строго опадајући јер је за све $n \in \mathbf{N}$ испуњено

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

дакле $a_{n+1} < a_n$.

Ученик 3. Низ (c_n) је строго растући, ограничен је одоздо $(g=5)$ али није ограничен одозго, па није ограничен. Низ (d_n) је строго опадајући, ограничен је одозго $(G=11)$ али није ограничен одоздо, па није ограничен. Треба ли да докажем ово?

Професор. Није потребно; уосталом, радили смо такве примере на претходном часу. Упознаћемо сада један нови низ, који можемо доделити сваком датом низу. Доделимо низу $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ низ $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}=(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. То је, као што видимо, низ разлика чланова низа (x_n), почев од другог, и њима претходних чланова. Дакле,

$$(d_n)_{n\in\mathbf{N}}=(x_2-x_1,x_3-x_2,x_4-x_3,x_5-x_4,\dots).$$

Видимо да је за низ (a_n) то низ чији је општи члан $d_n=\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$, дакле низ $\left(\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Напишимо неколико чланова тог низа и нађимо низове таквих разлика за остала три дата низа.

Ученик 4. За низ (a_n) добијамо низа разлика

$$\left(\frac{1}{(n+2)(n+1)}\right)_{n\in\mathbf{N}}=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\dots\right).$$

Ученик 5. За низ (b_n) налазимо низ разлика

$$\left(\frac{-1}{(n+1)n}\right)_{n\in\mathbf{N}}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{6},-\frac{1}{12},\dots\right).$$

Ученик 6. За низове (c_n) и (d_n) добијамо константне низове. За (c_n) то је низ $(2)_{n\in\mathbf{N}}$ а за низ (d_n) је то низ $(-3)_{n\in\mathbf{N}}$. Дакле, низови разлика су $(2,2,2,\dots)$ односно $(-3,-3,-3,\dots)$.

Професор. Низови бројева који имају својство ова последња два низа су аритметички низови. Запишимо сада дефиницију:

Низ бројева, код кога је разлика између било ког члана (почев од другог) и њему претходног члана константна, је *аритметички низ*. Број којем су једнаке све такве разлике је *разлика (диференција)* тог низа; обично га означавамо да d.

Може ли неко да запише симболима ово својство?

Ученик 7. $d=x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=\dots=x_n-x_{n-1}=\cdots$.

Професор. Ако знамо x_1 и d, из ових једнакости можемо сваки од чланова аритметичког низа изразити преко x_1 и d. Како?

Ученик 8. Ево, на пример:

$$x_2=x_1+d,\quad x_3=x_2+d,\quad x_4=x_3+d,\quad \dots,\quad x_n=x_{n-1}+d,\quad \dots$$

Професор. Али, то још није оно што смо желели.

Ученик 8. Није али, ако у другој једнакости x_2 заменимо из прве, а затим наставимо, добићемо

$$x_3=x_1+d+d=x_1+2d,\quad x_4=x_1+2d+d=x_1+3d,\quad \dots,$$

па видимо да је за свако $n \in \mathbf{N}$ тачна једнакост

$$x_n = x_1 + (n-1)d.$$

Професор. Шта значи „видимо“. Да ли је тиме ово тврђење доказано?

Ученик 8. Није, али ћемо га лако доказати методом математичке индукције.

Професор. Тачно. Урадите то за домаћи. Ако узмемо у обзир до сада речено о аритметичком низу, закључујемо да је он потпуно одређен својим првим чланом x_1 и разликом d. Формула коју смо извели

$$x_n = x_1 + (n-1)d \tag{1}$$

је *формула за општи члан таквог низа* и показује како се било који члан аритметичког низа може изразити помоћу првог члана x_1, разлике d и индекса n тог члана. Сада смо у могућности да аритметички низ, задат својим првим чланом и разликом, напишемо на други начин. Хоће ли неко?

Ученик 9. $\big(x_1 + (n-1)d\big)_{n\in\mathbf{N}}$.

Професор. Напиши то и у развијеном облику.

Ученик 9. $(x_1, x_1+d, x_1+2d, x_1+3d, \dots)$.

Професор. Добро. Упознаћемо и нека друга својства аритметичког низа. Ја ћу почети. Сваки члан аритметичког низа, почев од другог, једнак је аритметичкој средини два њему суседна члана, оног који му претходи и оног који му следи. Уверимо се у то.

Ученик 10. Члану a_2 суседни су a_1 и a_3. Имамо да је $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Стога

$$\frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} = \frac{2a_1 + 2d}{2} = a_1 + d = a_2.$$

Члану a_3 суседни су a_2 и a_4. Како је $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, то је

$$\frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{a_1 + d + a_1 + 3d}{2} = \frac{2a_1 + 4d}{2} = a_1 + 2d = a_3.$$

Произвољном члану a_n аритметичког низа суседни су a_{n-1} и a_{n+1}, при чему је $n > 1$. Како је $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_{n-1} = a_1 + ((n-1)-1)d$, $a_{n+1} = a_1 + ((n+1)-1)d$, то је

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2} = \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} = a_1 + (n-1)d = a_n.$$

Ученик 11. Професоре, ја сам утврдио да је $\dfrac{a_1 + a_5}{2} = a_3$. Ево

$$\frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} = \frac{2a_1 + 4d}{2} = a_1 + 2d = a_3.$$

Професор. Тачно. Ти си, у ствари, наслутио једно општије својство аритметичког низа. Ако је p неки природан број, сваки је члан аритметичког низа почев од $(p+1)$-ог једнак аритметичкој средини чланова низа који се налазе p места испред и p места иза њега у низу. Дакле, за свако $n > p$ је

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}.$$

Тако је, на пример, ако узмемо $p = 3$,

$$a_{17} = \frac{a_{14} + a_{20}}{2}.$$

Ко ће да докаже ово тврђење?

Ученик 12. $a_{n-p} = a_1 + ((n-p)-1)d$, $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_{n+p} = a_1 + ((n+p)-1)d$,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2} &= \frac{a_1 + (n-p-1)d + a_1 + (n+p-1)d}{2}\\ &= \frac{a_1 + (n-1)d - pd + a_1 + (n-1)d + pd}{2}\\ &= \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} = a_1 + (n-1)d = a_n.\end{aligned}$$

Професор. Често се каже да су чланови a_{n-p} и a_{n+p} симетрични у односу на a_n. Ако за три броја x, y, z важи (за неко a и неко d):

$$\begin{gathered} x = a, \quad y = a + d, \quad z = a + 2d \quad \text{или}\\ x = a - d, \quad y = a, \quad z = a + d \quad \text{или}\\ x = a - 2d, \quad y = a - d, \quad z = a, \end{gathered}$$

то су три узастопна члана аритметичког низа са разликом d. Но, не знамо који су по реду (не знамо њихове индексе). Урадићемо сада два једноставна задатка.

1. Задат је низ бројева $(1, 4, 7, 10, \ldots)$ чији је општи члан $a_n = 3n - 2$. Уверити се да је то аритметички низ. Да ли је број 298 члан тог низа? Ако јесте, који му је индекс?

Ученик 13. То јесте аритметички низ јер је разлика $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3$ за свако n. Дакле, $d = 3$, $a_1 = 1$. Ако је 298 члан тог низа, онда постоји $n \in \mathbf{N}$, такав да је $3n - 2 = 298$. Одавде налазимо $n = 100$. Стога је $298 = a_{100}$, па 298 јесте члан јиза и индекс му је 100.

Професор. Добро. Ево и другог задатка.

2. Између бројева 3 и 39 уметнути пет бројева тако да добијених седам бројева буде првих седам чланова аритметичког низа.

Ученик 14. Мора бити $a_1 = 3$, $a_7 = 39$. Из формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$, за $n = 7$, налазимо $39 = 3 + 6d$, односно $d = 6$. Стога су тражени бројеви 9, 15, 21, 27 и 33.

Професор. Урадићемо још један задатак.

3. Дати су први и трећи члан аритметичког низа, $a_1 = 43$, $a_3 = 35$. Одредити индекс најмањег позитивног члана тог низа.

Ученик 15. Због $a_3 = a_1 + 2d$ имамо $35 = 43 + 2d$, одакле налазимо $d = -4$. Стога је формула општег члана тог низа $a_n = 43 + (n-1)(-4)$. Према захтеву мора бити $43 + (n-1)(-4) > 0$, дакле $43 > 4n - 4$, односно $4n < 47$. Највећи природан број n за који је $4n < 47$ је број 11. Заиста, $4 \cdot 11 = 44 < 47$, али $4 \cdot 12 = 48 > 47$. Дакле, тражени индекс је 11. Одговарајући члан низа је $a_{11} = 43 - 4 \cdot 10 = 3$. Следећи члан је негативан ($a_{12} = 43 - 4 \cdot 11 = -1$).

Професор. Решићемо сада и четврти задатак, који се битно разликује од претходних.

4. Наћи збир свих једноцифрених и двоцифрених непарних бројева.

Ученик 16. Треба наћи збир $1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$. $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, ...

Професор. Потрајаће ако овако наставиш. Покушај истовремено са траженим збиром посматрати исти збир, али са сабирцима поређаним у обрнутом поретку:

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$$
$$S = 99 + 97 + 95 + \cdots + 3 + 1,$$

и нађи збир та два збира.

Ученик 16. Груписаћу сабирке:

$$2S = (1 + 99) + (3 + 97) + (5 + 95) + \cdots + (97 + 3) + (99 + 1).$$

У свакој од заграда збир је 100, а таквих заграда има ... Има их око 50, можда 49.

Професор. Уочимо да су бројеви 1, 3, 5, ..., 99 чланови аритметичког низа чији је први члан 1 и разлика 2. Његов општи члан је $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbf{N}$. За $n = 1$ добијамо $a_1 = 1$. Број 99 добијамо за $n = 50$, због $99 = 2 \cdot 50 - 1$. Дакле, тражимо збир првих 50 чланова тог низа.

Ученик 16. Знам. Има тачно 50 заграда, па је $2S = 50 \cdot 100$. Стога је тражени збир

$$S = 50 \cdot 50 = 2500.$$

Професор. Тачно. Видимо да смо успели израчунати збир првих 50 чланова једног аритметичког низа. Научићемо сада како се налази *збир првих n чланова произвољног аритметичког низа.*

Посматрајмо аритметички низ $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ и потражимо збир његових првих n чланова. Означимо тражени збир са S_n. На исти начин као у задатку 4 имамо

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Уочимо да је $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + a_{n-1} = a_1 + (d + a_{n-1}) = a_1 + a_n$, $a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + a_{n-2} = a_1 + (2d + a_{n-2}) = a_1 + a_n$, ... За свако $1 \leqslant k < n$

је $a_k + a_{n-(k-1)} = (a_1 + (k-1)d) + a_{n-(k-1)} = a_1 + ((k-1)d + a_{n-(k-1)}) = a_1 + a_{n-(k-1)+(k-1)} = a_1 + a_n$. Стога налазимо

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

односно

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{2}$$

То је формула за налажење збира првих n чланова аритметичког низа. Због $a_n = a_1 + (n-1)d$, формула (2) се може писати и у облику

$$S_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big). \tag{2'}$$

Урадићемо још неке задатке.

5. Израчунати збир првих петнаест чланова аритметичког низом, задатог формулом општег члана $a_n = 7 - 3n$.

Ученик 17. То је низ $(4, 1, -2, -5, \ldots)$. Имамо да је $a_1 = 4$, $d = -3$, $n = 15$. Користећи се формулом (2′) налазимо

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \cdot 4 + (15-1)(-3)) = \frac{15}{2} \cdot 34 = 15 \cdot 17 = 255.$$

Професор. Тачно. Ово није било сложено. Ево још једног задатка.

6. За зидање фабричког димњака висине 26 m плаћа се за први метар 60 динара, а за сваки даљи метар по 20 динара више. Колика је цена зидања последњег метра, а колико кошта зидање читавог димњака?

Ученик 18. Ако са c_n означим цену зидања n-тог метра димњака, имамо да је

$$c_1 = 60, \quad d = 20.$$

Тражимо c_{26} и S_{26}. Користећу се формулама (1) и (2).

$$\begin{aligned} c_{26} &= c_1 + (26-1)d = 60 + 25 \cdot 20 = 560, \\ S_{26} &= \frac{26}{2}(c_1 + c_{26}) = \frac{26}{2}(60 + 560) = 13 \cdot 620 = 8060. \end{aligned}$$

Дакле, цена зидања последњег метра је 560 динара а зидање целог димњака кошта 8060 динара.

3. Завршни део часа (10 минута).

Професор. Упознали смо аритметички низ. Какав је то низ?

Ученик 19. То је низ бројева код којег је разлика сваког његовог члана, почев од другог, и члана који му у низу претходи, константна. Та константна разлика је разлика или диференција аритметичког низа и обично је означавамо са d.

Професор. Ако је низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ аритметички, његови су чланови аритметичке средине неких других чланова тог низа. Којих?

Ученик 20. Сваки члан (почев од другог) аритметичког низа је аритметичка средина два њему суседна члана или два од њега у низу једнако „удаљена“ члана.

Професор. За аритметички низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ чија је разлика d, његов општи члан и збир првих n чланова тог низа могу се изразити помоћу првог члана и d. Како?

Ученик 21. Помоћу формуле општег члана:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

односно помоћу формуле за збир првих n чланова:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Професор. Тачно. Напоменимо да се у ове две формуле појављује пет величина: a_1, d, n, a_n, S_n. Стога је могућно две од њих (било које) изразити помоћу остале три. Из скупа од 5 елемената два од њих се могу изабрати на $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ начина, па постоји 10 у основи различитих задатака. Неки од њих доводе до линеарних а неке до квадратних једначина. Уверићете се у то док будете радили домаће задатке. Не заборавите доказ формуле општег члана. Поред тога урадите и:

1. Нађи лако, брзо и тачно збир свих природних бројева од 1 до 100.

2. Четврти члан аритметичког низа је 7, а дванаести 3. Нађи девети члан тог низа и збир његових првих педесет чланова.

3. Разлика аритметичког низа је 3, његов пети члан је 8 а збир извесног броја његових чланова је 14. Који је то низ и колико је чланова у том збиру?

4. За копање бунара раднику је плаћено 8050 динара. Колика је била дубина бунара ако је за први метар плаћено 250 динара, а за сваки даљи метар 50 динара више него за претходни?