Др Владимир Јанковић

ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ

У уџбеницима Математичке анализе, у поглављима која се односе на диференцирање функција више променљивих, појављује се теорема о имплицитној функцији. Она под одређеним претпоставкама тврди локалну егзистенцију и јединост глатке имплицитне функције. Та теорема у пуном облику има само теоријски значај. Приликом решавања конкретних задатака о имплицитној функцији најчешће се доказује егзистенција глобалног карактера. Ту теорема о локалној егзистенцији није од велике помоћи. Теорема о имплицитној функцији се најчешће примењује у ситуацији када је потребно доказати глаткост имплицитне функције. Тако се у пракси од ове прилично тешке и сложене теореме користи само један њен део, за који би се чак могло рећи да представља успутни резултат.

Мишљења смо да питање егзистенције и питање глаткости имплицитне функције треба раздвојити. Теорема која решава питање диференцијабилности имплицитне функције доказује се доста једноставно, знатно лакше од теореме егзистенције. Она гласи:

Теорема 1. *Нека су X, Y и Z нормирани простори, D скуп у $X\times Y$ и U скуп у X. Нека је f функција која пресликава D у Z и нека је g функција која пресликава U у Y, тако да је $f(x,g(x))=0$, за свако $x\in U$. Ако важи*

a) *функција g је непрекидна у унутрашњој тачки a скупа U,*

b) *функција f је диференцијабилна (у Фрешеовом смислу) у тачки (a,b), $b=g(a)$,*

c) *извод по y функције f у тачки (a,b) је изоморфизам простора Y и Z, онда је функција g диференцијабилна у тачки a, и при том је*

$$g'(a)=-f_y(a,g(a))^{-1}\circ f_x(a,g(a)). \tag{1}$$

Доказ. Како је функција f диференцијабилна у тачки (a,b), то се она може представити у облику

$$f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+(\|x-a\|+\|y-b\|)\gamma(x,y), \tag{2}$$

где је $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$, и где је γ функција која прсилкава скуп D у Z, која је непрекидна у тачки (a,b) и задовољава услов $\gamma(a,b)=0$. Ако у (2) заменимо y са $g(x)$, добијамо да је

$$A(x-a)+B(g(x)-g(a))+(\|x-a\|+\|g(x)-g(a)\|)\gamma(x,g(x))=0. \tag{3}$$

Одавде следи

$$g(x) = g(a) - B^{-1}A(x-a) + \|x-a\|\alpha(x), \tag{4}$$

где је α функција која пресликава U у Y, задата са

$$\alpha(x) = -(1 + \|g(x) - g(a)\|/\|x-a\|)B^{-1}\gamma(x, g(x)), \quad \alpha(a) = 0. \tag{5}$$

Довољно је доказати да је функција α непрекидна у тачки a. С обзиром на (5), довољно је доказати да је израз $\|g(x) - g(a)\|/\|x-a\|$ ограничен у некој околини тачке a. Из (3) следи да је

$$\|g(x) - g(a)\| \leqslant \|B^{-1}A\|\|x-a\| + (\|x-a\| + \|g(x)-g(a)\|)\|B^{-1}\gamma(x, g(x))\|, \tag{6}$$

одакле добијамо да је

$$\|g(x)-g(a)\|/\|x-a\| \leqslant (\|B^{-1}A\| + \|B^{-1}\gamma(x,g(x))\|)/(1 - \|B^{-1}\gamma(x,g(x))\|). \tag{7}$$

Израз на десној страни неједнакости (7) има коначну граничну вредност у тачки a, па је зато ограничен у некој њеној околини. ■

Следећа теорема говори о глаткости имплицитне функције.

Теорема 2. *Нека су X нормиран простор, Y и Z Банахови простори, D отворен скуп у $X \times Y$ и U отворен скуп у X. Нека је f функција која пресликава D у Z и нека је g функција која пресликава U у Y, тако да је $f(x, g(x)) = 0$, за свако $x \in U$. Ако важи*

a) *функција g је непрекидна на скупу U,*

b) *функција f је k пута непрекидно диференцијабилна на скупу D,*

c) *извод по y функције f у свакој тачки скупа D је изоморфизам простора Y и Z,*

онда је функција g k пута непрекидно диференцијабилна на скупу U.

Тврђење ове теореме се доказује методом математичке индукције по k, помоћу (1), претпоставке да је функција f класе C^k и чињенице да је оператор инвертовања класе C^∞ на $\mathrm{Isom}(Y, Z)$ (види [1], глава 1, теорема 5.4.3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cartan, *Calcul Différentiel*, Hermann, Paris, 1967