Милан Шарић

МЕТОД ПОВРШИНА

Основна идеја при решавању задатака овом методом састоји се у томе да се површина неке фигуре изрази на два или више начина, то упореди и низом трансформација дође до траженог закључка.

Том методом можемо доказати многе теореме које се могу доказати и на други начин, на пример, Талесову теорему о пропорционалности у прамену правих, Еуклидову теорему о висини у правоуглом троуглу, Питагорину теорему итд.

Докажимо Чевину теорему помоћу површина.

Теорема 1. *Ако је дат троугао ABC и тачке P, Q и M (где је $P \in BC$, $Q \in AC$ и $M \in AB$), онда се дужи AP, BQ и MC секу у једној тачки ако и само ако важи*

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1. \tag{1}$$

Доказ. (а) Нека је дат троугао ABC, и нека се праве AP, BQ и CM секу у једној тачки. Означимо троуглове што их образују те праве (слика 1) са P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Како троуглови AMO и MBO имају заједничку висину, то је

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1 + P_5 + P_6}{P_2 + P_3 + P_4} = \frac{P_5 + P_6}{P_3 + P_4}. \tag{2}$$

Аналогно томе је

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{P_1 + P_2}{P_5 + P_6}, \tag{3}$$

$$\frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{P_3 + P_4}{P_1 + P_2}. \tag{4}$$

Помножимо ли (2), (3) и (4), добијамо (1).

(б) Докажимо сада обрнуто тврђење.

Претпоставимо да важи једнакост $\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$, а да се праве AP, BQ и CM не секу у једној тачки. Конструишимо праву кроз тачку C и пресек правих AP и BQ и нека та права сече страницу AB у тачки R. Тада према првом делу доказа важи $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$, односно

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = \frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|},$$

Сл. 1. Сл. 2.

тј. $\dfrac{|AR|}{|RB|}=\dfrac{|AM|}{|MB|}$. Дакле, ако важи једнакост (1), тада је $M\equiv R$, тј. праве AP, BQ и CM секу се у једној тачки. ■

Користећи наведену методу можемо решавати задатке из различитих области.

Аналитичка геометрија

Задатак 1. Доказати да у координатној равни не постоји једнакокраки троугао с углом од 45° при врху чија су темена у целобројним тачкама.

Решење. Претпоставимо да такав троугао ABC постоји. Тада површину троугла ABC (слика 2) можемо изразити на два начина:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_3)|,\quad x_i,y_i\in\mathbf{Z},\ i=1,2,3,$$

одакле $P_{ABC}\in\mathbf{Q}$, односно

$$P_{ABC}=\frac{ah_a}{2}=\frac{a\cdot a\sin 45^\circ}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}\sqrt{2},$$

одакле $P_{ABC}\notin\mathbf{Q}$. Добили смо контрадикцију, дакле такав троугао не постоји.

Проблеми екстремних вредности

Задатак 2. Међу свим троугловима задатаог обима наћи онај у коме је полупречник уписане кружнице највећи.

Решење. Изразимо површину троугла помоћу обима и полупречника уписане кружнице: $P=\dfrac{r}{2}(a+b+c)=rs$. P је максимално кад је r максимално. Применом Херонове формуле имамо

$$\frac{P^2}{s}=(s-a)(s-b)(s-c).$$

Применом Кошијеве неједнакости

$$\frac{P^2}{s}\leqslant\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3,$$

$$P^2\leqslant\frac{s^4}{27}. \tag{1}$$

Ако је троугао једнакостраничан, његова површина је $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а полуобим $s = \dfrac{3a}{2}$, па је

$$P^2 = \frac{3a^2}{16} = \frac{3}{16}\left(\frac{2}{3}s\right)^4 = \frac{s^4}{27}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је полупречник највећи ако је троугао једнакостраничан.

Неједнакости

Задатак 3. Доказати да за сваки троугао важи релација $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$, где су h_a, h_b, h_c висине троугла, а r полупречник кружнице уписане у тај троугао.

Решење. Изразимо површину троугла на два начина:

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{a+b+c}{2}r,$$

одакле је

$$h_a = r\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right).$$

Аналогно,

$$h_b = r\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right), \quad h_c = r\left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right).$$

Сабирањем имамо

$$h_a + h_b + h_c = r\left(3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Како за позитивне реалне бројеве x и y важи $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$, то је

$$h_a + h_b + h_c \geqslant r(3+2+2+2) = 9r.$$

ОБАВЕШТЕЊЕ

Из штампе је изашао први број часописа

ТАНГЕНТА.

ТАНГЕНТА је часопис за математику и рачунарство, намењен ученицима средњих школа. Оснивач часописа је Савез друштава математичара Југославије, а издавач Друштво математичара Србије. Излазиће у четири броја годишње. Адреса редакције је:

Друштво математичара Србије, Подружница Нови Сад
Институт за математику
Трг Доситеја Обрадовића 4
21000 Нови Сад