Мр Љубинко М. Андрић

РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ТАЧАКА ЕУКЛИДСКЕ РАВНИ E^2 ИЗВЕДЕНО ИЗ ДВОРАЗМЕРЕ ТАЧАКА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ $P^2 \supset E^2$

Проблем растојања (дистанце) између две ма које тачке неког простора спада у фундаменталне појмове.

Дефиниција 1. Нека је M ма какав непразан скуп и A, B и C ма која три елемента тога скупа, тј. A, B, $C \in M$. Пресликавање $d\colon M^2 \to [0, +\infty)$ назива се *растојањем* или *дистанцом*, ако су испуњени следећи услови:

$$\begin{aligned} &1.\ (\forall A, B \in M)\, d(A,B) \geqslant 0,\\ &2.\ d(A,B) = 0 \iff A = B,\\ &3.\ d(A,B) = d(B,A),\\ &4.\ (\forall A, B, C \in M)\, d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C). \end{aligned} \tag{1}$$

Уређен пар (M, d) назива се *метрички простор*, а растојање $d\colon M^2 \to [0, +\infty)$ називамо *метриком* на скупу M. Елементе A, B, C скупа M називамо *тачкама* простора (M, d).

Пример. Ако за скуп M узмемо реалну раван $\mathbf{R}^2$, а као елементе из $\mathbf{R}^2$ тачке $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ приказане својим координатама, онда се растојање $d(A, B)$ између тих тачака уводи на следећи начин

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \tag{2}$$

Није тешко утврдити да овако дефинисано растојање између тачака A и B равни $\mathbf{R}^2$ задовољава сва четири услова из релације (1).

Дефиниција 2. Трансформација $f\colon M \to M$ простора (M, d) код које је $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$, тј. трансформација која чува растојање, назива се *изометријском трансформацијом* или *трансформацијом подударности* простора (M, d).

Из неведене дефиниције се види да је растојање бројевна инваријанта изометријских трансформација простора (M, d). Та инваријанта везана је за две ма које тачке скупа M.

У пројективном простору као бројевна инваријанта јавља се *дворазмера* четири колинеарне тачке при пројективним трансформацијама тога простора. Ову чињеницу искористићемо да појам растојања у еуклидској равни E^2 као инваријанту двеју тачака, покушамо извести из дворазмере као бројевне инваријанте четири колинеарне тачке пројективне равни $P^2 \supset E^2$, добијене проширивањем еуклидске равни E^2 бесконачно далеком правом $\omega \subset P^2$.

Претходно, наведимо неке основне појмове везане за тако посматрани модел реалне пројективне равни $P^2 \supset E^2$, у коју смо увели пројективни координатни систем.

Пројективним хомогеним координатама пројективне тачке M равни $P^2 \supset E^2$ називамо уређену тројку (m_1, m_2, m_3) реалних бројева m_i, $i = 1, 2, 3$ и означавамо са $M(m_1, m_2, m_3)$. Тачку $M(m_1, m_2, m_3)$ код које је $m_3 \neq 0$ зваћемо *својствена тачка* равни P^2, а тачку $M(m_1, m_2, m_3)$ код које је $m_3 = 0$, тј. тачку $M(m_1, m_2, 0)$, зваћемо *несвојственом* или *бесконачно далеком* тачком равни P^2. Скуп свих несвојствених тачака равни P^2 називамо *несвојственом* или *бесконачно далеком* правом, коју означавамо са ω, $\omega \subset P^2$, аналитички изражену са $\omega = \{\, (x_1, x_2, x_3) \ : \ x_3 = 0 \,\}$.

Ма коју праву на моделу посматране пројективне равни P^2 зваћемо *пројективна права* и означавати са $\bar{p}$, $\bar{p} \subset P^2$. Њу сачињавају својствене колинеарне тачке равни P^2 и несвојствена тачка $P_\omega \in \omega$. Права $p \subset \bar{p}$ коју сачињавају својствене тачке пројективне праве $\bar{p} \subset P^2$, назива се *својствена* или *еуклидска* права. На тај начин пројективна права $\bar{p} \subset P^2$ може се приказати као унија својствене праве $p \subset \bar{p}$ и несвојствене тачке $P_\omega \in \omega$, тј. $\bar{p} = p \cup \{P_\omega\}$. Тим придруживањем еуклидској правој $p \subset E^2$ несвојствене тачке $P_\omega \in \omega$, пројективна права $\bar{p} = p \cup \{P_\omega\}$ постаје затворена линија, што је у складу са особином пројективне праве.

Дефиниција 3. *Дворазмером* четири различите колинеарне тачке $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ и $D(d_1, d_2, d_3)$ пројективне равни P^2 називамо један од бројева

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}}, \quad \text{односно} \quad \frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}},$$

и означавамо са $(ABCD)$, тј.

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}}, \tag{3}$$

односно

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

На основу дефиниције, могу се показати следеће особине дворазмере:

$$
\begin{aligned}
&(CDAB) = (ABCD),\\
&(ACBD) = 1 - (ABCD),\\
&(BCAD) = \frac{1}{(ABCD)}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Може се показати да дворазмера четири колинеарне тачке не може имати вредности једнаке нули, јединици или бесконачности.

Такође, ако је $(ABCD) > 0$, онда пар тачака A , B *не раздваја* пар тачака C, D; ако је $(ABCD) < 0$, онда пар тачака A, B *раздваја* пар тачака C, D.

Дефиниција 4. За колинеарне тачке $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ и $D(d_1, d_2, d_3)$ пројективне равни P^2 кажемо да су *хармонијске*, ако је њихова дворазмера једнака -1, тј.

$$
(ABCD) = -1, \tag{6}
$$

што означавамо са $H(A, B, C, D)$.

Како је хармонијска раздвојеност парова тачака специјалан случај дворазмере, при пројективним трансформацијама равни P^2 хармонијска раздвојеност парова тачака је инваријантна.

После ових напомена, вратимо се дефиницији растојања између двеју тачака еуклидске равни $E^2 \subset P^2$ са пројективног становишта.

Нека су $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ и $E(e_1, e_2, e_3)$ својствене тачке пројективне равни $P^2 \supset E^2$, тј. тачке еуклидске равни E^2, а $D_\omega(d_1, d_2, 0) \in \omega$ несвојствена тачка равни P^2, које припадају пројективној правој $\bar{p} \subset P^2$. Одсечак $AE \subset E^2$ узећемо за јединицу мере на еуклидској правој $p \subset \bar{p}$ и ту чињеницу искористити да помоћу њега (одсечка AE) упоређујемо остале одсечке на тој правој.

Дефиниција 5. Под *растојањем* $d(A, B)$ између тачака A и B еуклидске равни $E^2 \subset P^2$ подразумевамо дворазмеру $(AD_\omega BE)$ тачака A, B, E и D_ω, тј.

$$
d(A, B) = (AD_\omega BE), \tag{7}
$$

где су A, B и E својствене тачке равни P^2, а $D_\omega \in \omega$ несвојствена тачка те равни, сл. 1.

Сл. 1

Изражавајући дворазмеру тачака $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $E(e_1, e_2, e_3)$ и $D_\omega(d_1, d_2, 0)$ помоћу њихових координата, према (3) и (4), растојање $d(A, B)$

између тачака $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ равни E^2 може се приказати једном од формула

$$(8)\qquad d(A,B)=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_1\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1\\ 0 & b_3\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} e_1 & a_1\\ e_3 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & e_1\\ 0 & e_3\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{b_1}{b_3}-\dfrac{a_1}{a_3}}{\dfrac{e_1}{e_3}-\dfrac{a_1}{a_3}},$$

$$(9)\qquad d(A,B)=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_2 & b_2\\ 0 & b_3\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} e_2 & a_2\\ e_3 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_2 & e_2\\ 0 & e_3\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{b_2}{b_3}-\dfrac{a_2}{a_3}}{\dfrac{e_2}{e_3}-\dfrac{a_2}{a_3}},$$

које су еквивалентне, јер су тачке A, B, E и D_ω колинеарне.

Када су тачке A, B, E и D_ω различите дворазмера $(AD_\omega BE)$ је позитивна, јер пар тачака A, D_ω не раздваја пар тачака B, E, па је $d(A,B)=(AD_\omega BE)>0$.

Ако се тачке $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ поклапају, то су њихове хомогене координате пропорционалне, тј. $b_i=\rho a_i$, $i=1,2,3$, $\rho\neq 0$, па заменом тих вредности у (8), односно (9), добија се $d(A,B)=d(A,A)=0$. Дакле, растојање $d(A,B)$ је ненегативан број.

Ако се, пак, тачке $B(b_1,b_2,b_3)$ и $E(e_1,e_2,e_3)$ поклапају, тј. ако је $b_i=\rho e_i$, $i=1,2,3$, $\rho\neq 0$, заменом у (8), односно (9), добија се $d(A,B)=(AD_\omega BE)=(AD_\omega EE)=d(A,E)=1$, што је у сагласности да се одсечак $AE\subset p$ узме као јединица мере на правој $p\subset E^2$.

Ако се тачка $B(b_1,b_2,b_3)$ приближава несвојственој тачки $D_\omega\in\omega$, тј. њена трећа координата b_3 тежи нули, из формуле (8), односно (9), следи

$$\lim_{b_3\to 0} d(A,B)=\lim_{b_3\to 0}\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_1\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1\\ 0 & b_3\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} e_1 & a_1\\ e_3 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & e_1\\ 0 & e_3\end{vmatrix}}=\infty,$$

а то значи да одсечак $AD\subset\bar{p}\subset P^2$ није мерљив, јер он у равни E^2 представља полуправу.

На основу дефиниције растојања, може се доказати да за произвољну тачку $C(c_1,c_2,c_3)$, колинеарну са тачкама $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$, такву да је $(ABCD_\omega)<0$, тј. да пар тачака A, B раздваја пар тачака C, D_ω, важи релација

$$d(A,C)+d(C,B)=d(A,B),$$

што значи да је растојање колинеарних тачака A, B и C равни E^2 адитивно.

У досадашњем разматрању је растојање између двеју својствених тачака A, $B\in E^2$ дато у пројективној форми преко дворазмере тачака A, B, E и D_ω равни $P^2\supset E^2$. У даљем излагању доказаћемо да је овако уведено растојање између својствених тачака пројективне равни P^2 еквивалентно формули за растојање између двеју тачака еуклидске равни $E^2\subset P^2$, дато на уобичајен начин.

Докажимо, најпре, да је својственим тачкама A и E равни P^2 и апсолутном инволуцијом J на несвојственој правој $\omega\subset P^2$ једнозначно одређена недегенерисана крива $\bar{k} \subset P^2$ другог реда, код које је тачка A пол праве $\omega \subset P^2$, а E тачка криве $\bar{k}$ у поларитету индукованом том инволуцијом.

Недегенерисана крива $\bar{k} \subset P^2$ другог реда, у општем случају, једнозначно је одређена са пет колинеарних тачака, од којих никоје три нису колинеарне. Специјално, крива $\bar{k}$ одређена је са две своје тангенте, додирним тачкама тих тангената и једном тачком те криве, различитом од додирних тачака. Овај случај ће нам послужити да дођемо до тражене криве $\bar{k}$, одређене апсолутном инволуцијом J и својственим тачкама A и E равни P^2.

До тачке E' тражене криве $\bar{k} \subset P^2$ долазимо из услова $(E'EAS_\omega) = -1$, сл. 2.

Сл. 2

Задата апсолутна (елиптичка) инволуција J на несвојственој правој $\omega \subset P^2$ индукује поларно пресликавање равни P^2 у којем је тачка A пол несвојствене праве $\omega \subset P^2$, а тачка $D'_\omega = J(D_\omega)$ (хомологна тачка тачки D_ω у инволуцији J) пол праве AE , при чему је тротеменик $AD_\omega D'_\omega$ аутополаран. На тај начин праве $D'_\omega E$ и $D'_\omega E'$ су тангенте тражене криве $\bar{k}$ с додирним тачкама, редом, E и E'. До још једне тачке E'' тражене криве $\bar{k}$, различите од тачака E и E' долазимо на следећи начин. Нека је $\bar{s} \subset P^2$ произвољна права кроз тачку A и S_ω пресечна тачка те праве и несвојствене праве $\omega \subset P^2$, тј. $\{S_\omega\} = \bar{s} \cap \omega$. Означимо са $S'_\omega = J(S_\omega)$ хомологну тачку тачки S_ω у инволуцији J, а са Q пресечну тачку правих $S'_\omega E'$ и $\bar{s} \subset P^2$, односно $\{Q\} = S'_\omega E' \cap \bar{s}$. Тачка $E'' \in \bar{k}$ једнозначно је одређена из услова $(E''E'QS'_\omega) = -1$. Да тачка E'' припада кривој $\bar{k}$ следи из чињенице да је у индукованом поларитету тачка S'_ω пол праве $\bar{s} = AQ$.

Тачкама E и E' криве $\bar{k}$ у којима, редом, праве $D'_\omega E$ и $D'_\omega E'$ додирују ту криву и тачком E'' крива $\bar{k}$ је једнозначно одређена, што нам је и био крајњи циљ.

Сл. 3

Тачка A као пол праве $\omega \subset P^2$ је *центар* криве $\bar{k} \subset P^2$, а праве AD_ω и AD'_ω су њени *дијаметри*. С обзиром да су тачке D_ω и $D'_\omega = J(D_\omega)$ хомологне тачке апсолутне инволуције J на правој ω, то су праве AD_ω и AD'_ω ортогоналне у еуклидској равни $E^2 \subset P^2$, па је то пар конјугованих дијаметара криве $\bar{k}$ међусобно ортогоналних, што значи да крива $\bar{k}$ у равни E^2 представља круг $k \subset E^2$ са средиштем у тачки $A(a_1, a_2, a_3)$ и полупречником $d(A, E)$, сл. 3, чија је једначина, с обзиром на $d(A, E) = 1$,

$$\left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{a_1}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} - \frac{a_2}{a_3}\right)^2 = 1, \tag{10}$$

где је $X(x_1, x_2, x_3)$ произвољна тачка равни E^2, која припада кругу $k \subset E^2$.

С обзиром да тачка $E(e_1, e_2, e_3)$ припада кругу k њене координате задовољавају једначину (10), па је

$$\left(\frac{e_1}{e_3} - \frac{a_1}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{e_3} - \frac{a_2}{a_3}\right)^2 = 1. \tag{11}$$

Вратимо се сада формулама (8) и (9) којима је дефинисано растојање $d(A, B)$ између својствених тачака $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ равни $P^2 \supset E^2$. Ако их напишемо у облику

$$\frac{b_1}{b_3} - \frac{a_1}{a_3} = \left(\frac{e_1}{e_3} - \frac{a_1}{a_3}\right) d(A, B)$$

односно

$$\frac{b_2}{b_3} - \frac{a_2}{a_3} = \left(\frac{e_2}{e_3} - \frac{a_2}{a_3}\right) d(A, B),$$

па њиховим квадрирањем и сабирањем добијамо

$$\left(\frac{b_1}{b_3} - \frac{a_1}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{b_3} - \frac{a_2}{a_3}\right)^2 = \left[\left(\frac{e_1}{e_3} - \frac{a_1}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{e_3} - \frac{a_2}{a_3}\right)^2\right] d^2(A, B),$$

одакле је, с обзиром на (11),

$$d(A,B)=\sqrt{\left(\frac{b_1}{b_3}-\frac{a_1}{a_3}\right)^2+\left(\frac{b_2}{b_3}-\frac{a_2}{a_3}\right)^2}. \tag{12}$$

Формула (12) изражава растојање $d(A,B)$ између својствених тачака $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ равни $P^2\supset E^2$, које су представљене својим пројективним хомогеним координатама те равни.

Преласком на нехомогене (еуклидске) координате тачака $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$, уводећи смене $x_A=\dfrac{a_1}{a_3}$, $y_A=\dfrac{a_2}{a_3}$, односно $x_B=\dfrac{b_1}{b_3}$, $y_B=\dfrac{b_2}{b_3}$, заменом у формули (12), добија се

$$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2},$$

што представља уобичајену формулу за растојање између тачака $A(x_A,y_A)$ и $B(x_B,y_B)$ еуклидске равни $E^2\subset P^2$, познату из елементарног курса геометрије равни E^2, о чему је било речи у уводу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Четверухин, Н. Ф., *Пројективная геометрия*, Москва, 1969.
[2] Глаголев, Н. А., *Пројективная геометрия*, Москва 1963.
[3] Гуревич, Г. Б., *Пројективная геометрия*, Москва 1966.
[4] Ефимов, Н. В., *Висшая геометрия*, Москва 1966.
[5] Комиссарук, А. М., *Пројективная геометрия в задачах*, Минск, 1977.
[6] Првановић, М., *Пројективна геометрија*, Београд, 1986.
[7] Андрић, М. Љ., *Трансформације еуклидске равни E^2 са становишта пројектвне геометрије* (магистарски рад), ПМФ Београд, 1983.