Др Раде Дорословачки

О ИНВЕРЗНИМ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИМ ФУНКЦИЈАМА — НА ДРУГИ НАЧИН[1]

По плановима и програмима математике наших средњих школа изучавају се функције, инверзне функције, тригонометријске функције, итд, што се ефективно у школама и ради. Одавде логично следи да се изучавају и инверзне тригонометријске функције. Међутим, фактичко стање ствари је да се то уопште не ради. Чак и наши најбољи ученици који су учесници међународних математичких олимпијада, на једним припремама на Палићу нису знали одговор на питања као што су $\arccos\left(\cos\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=?$, $\arccos(\cos 6)=?$, $\arccos(\cos 7)=?$ итд. Тиме су сви они, иако су ученици трећих и четвртих разреда средњих школа, показали да немају скоро ни елементарних знања о инверзним тригонометријским функцијама. Са друге стране, значај инверзних тригонометријских функција у методичко-педагошком, па и стручном смислу је огроман. Најлепши и најкарактеристичнији (понекад и једини) примери за илустрацију важних теорема у разним областима математике, црпе се из скупа инверзних тригонометријских функција. Циљ овог рада је да допринесе у отклањању те празнине у средњошколском математичком образовању, што је даље од значаја за све оне ученике који ће ићи на студије математике, физике, технике и др.

1. Основне дефиниције

Прво ћемо дати дефиниције тригонометријских функција на једноставан начин, разумљив и за ученике основних школа. Наравно, те дефиниције ће бити и коректне.

Дефиниција 1. Функција *синус*, у ознаци sin, пресликава реални број $x \in [0,\pi]$, који је мерни број лука AB јединичне кружнице k, у растојање тачке A од пречника кружнице k коме припада тачка B. Ако је $x \in (-\pi, 0)$, тада је $\sin x = -\sin(-x)$. А ако $x \notin (-\pi,\pi]$, тада је $\sin x = \sin(x+2k\pi)$, где је k цео број такав да је $x+2k\pi \in (-\pi,\pi]$, сл. 1.

Значи, функција sin пресликава скуп свих реалних бројева на скуп $[-1,1]$ и она је периодична са периодом 2π. Број $\pi = 3{,}14159\ldots$ је полуобим јединичне кружнице.

[1] Саопштено на Републичком семинару о настави математике и рачунарства 15. 01. 1993.

Дефиниција 2. Функције *косинус, тангенс* и *котангенс*, у ознакама cos, tg и ctg, дефинисане су једнакостима

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad && x \in \mathbf{R},\\
\operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, && x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\},\\
\operatorname{ctg} &= \frac{\cos x}{\sin x}, && x \in \mathbf{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \}.
\end{aligned}$$

Сл. 1

Нека су тачке A и B на јединичној кружници k са центром O, дужина лука $\overset{\frown}{AB}$ нека је x, пројекцију тачке A на пречник кружнице k коме припада тачка B означимо са C и нека је тачка D она тачка кружнице k за коју је $\angle BOD = \pi/2$ (дужина лука $\overset{\frown}{BD}$ је $\pi/2$) и тачка A припада луку $\overset{\frown}{BD}$. Нека тачка E припада луку $\overset{\frown}{BD}$ и нека је дужина лука $\overset{\frown}{DE}$ једнака x. Пројекцију тачке E на полупречник OD означимо са F, а на полупречник OB са G, сл. 1. Сада је очевидно да је $\cos x = \sin(\pi/2 - x) = \sin \overset{\frown}{BE} = EG = FO = OC$, јер је цела слика симетрична у односу на симетралу угла $\angle BOD$. Значи, ако је $\overset{\frown}{AB} = x$, тада је растојање тачке A од пречника коме припада тачка B једнако $\sin x$, а од пречника нормалног на претходни је $\cos x$. Ознаку $\overset{\frown}{AB}$ користимо и за лук $\overset{\frown}{AB}$ и његову дужину (тј. мерни број лука $\overset{\frown}{AB}$). По Питагориној теореми из $\triangle OCA$ следи $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ако је t тангента у тачки B лука $\overset{\frown}{AB}$ и тачка M пресек праве t са правом кроз тачке O и A, онда је због сличности троуглова OCA и OBM, $\operatorname{tg} x = BM$, сл. 2. Ако је l тангента кружнице у тачки D и N пресек праве l и праве кроз тачке O и A, онда је због сличности троуглова OCA и NDO, $\operatorname{ctg} x = DN$, сл. 2.

Сл. 2

Познато је да функција f има себи инверзну функцију f^{-1} ако и само ако је инјективна (1–1) функција. Како функције sin, cos, tg и ctg очевидно нису инјективне, јер је, на пример, $\sin\pi/3 = \sin 2\pi/3$, $\cos\pi/4 = \cos(-\pi/4)$, $\operatorname{tg}\pi/6 = \operatorname{tg}7\pi/6$ и $\operatorname{ctg}\pi/2 = \operatorname{ctg}3\pi/2$, то оне немају себи инверзне функције. Међутим, њихове инјективне рестрикције имају себи инверзне функције. Рестрикција $\sin_{[-\pi/2,\pi/2]}$ функције sin је инјективна, па има инверзну која се означава са arcsin (тј. $\sin^{-1}_{[-\pi/2,\pi/2]} = \arcsin$). Значи, arcsin пресликава $[-1,1]$ на $[-\pi/2,\pi/2]$ (тј. $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$). Аналогно, arccos, arctg и arcctg су по дефиницији инверзне функције редом функцијама $\cos_{[0,\pi]}$, $\operatorname{tg}_{(-\pi/2,\pi/2)}$ и $\operatorname{ctg}_{(0,\pi)}$, тј. $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, $\operatorname{arctg}\colon \mathbf{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$ и $\operatorname{arcctg}\colon \mathbf{R} \to (0,\pi)$, сл. 3.

Сл. 3

Пример 1.

$$\arccos\left(\cos\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \arccos\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \in [0,\pi].$$

$$\arccos(\cos 6) = \arccos(\cos(2\pi - 6)) = 2\pi - 6 \in [0,\pi].$$

$$\arccos(\cos 7) = \arccos(\cos(7 - 2\pi)) = 7 - 2\pi \in [0,\pi].$$

$$\arccos(\cos 1993) = \arccos(\cos(1993 - 634\pi)) = 1993 - 634\pi \in [0,\pi].$$

2. Основне теореме и идентитети

Теорема 1. $\arccos(\cos x) = \pm x + 2k\pi$ *за неки цео број* k *и за један од знакова* $+$ *или* $-$, *тако да буде* $\pm x + 2k\pi \in [0,\pi]$.

Доказ. Како је $\arccos z \in [0,\pi]$ за свако $z \in [-1,1]$, то је $\arccos(\cos t) = t$ само за $t \in [0,\pi]$. Према томе, да бисмо израчунали $y = \arccos(\cos x)$, треба пронаћи такав реалан број y за који важе следећа два услова:

1. $\cos x = \cos y$,
2. $y \in [0,\pi]$.

С обзиром да је $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ и $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ за сваки цео број k, то ће тражени број y бити $y = \pm x + 2k\pi$, јер је тиме први услов задовољен, а знак $+$ или $-$ и број k бирамо тако да $\pm x + 2k\pi$ припада интервалу $[0,\pi]$, што је очевидно могуће за јединствен избор знака $+$ или $-$ и само један цео број k. ■

Пример 2. $\cos(\arccos x) = x$ за сваки реални број $x \in [-1,1]$.

Пример 3. Нацртати график функције $f(x) = \arccos(\cos x)$.

Сл. 4

Пример 4. $\sin(\arcsin x) = x$ за сваки реалан број $x \in [-1,1]$.
$\arcsin(\sin x) = x$ само за $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пример 5. $\arcsin(\sin\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\arcsin(\sin\sqrt{3}) = \pi - \sqrt{3}$, $\arcsin(\sin 5) = 5 - 2\pi$, $\arcsin(\sin 15) = 5\pi - 15$, $\arcsin(\sin 16) = 5\pi - 16$.

Лема *За произвољни реални број* x *постоји тачно један цео број* k *такав да тачно један од бројева* $x + 2k\pi$ *и* $\pi - (x + 2k\pi)$ *припада интервалу* $[-\pi/2, \pi/2]$.

Доказ. Јасно је да постоји само један цео број k за који је $x + 2k\pi \in [-\pi/2, 3\pi/2)$, где је x произвољни реалан број, јер је интервал $[-\pi/2, 3\pi/2)$ дужине 2π. И сад ако је $x + 2k\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$, лема је доказана, а ако је $x + 2k\pi \in (\pi/2, 3\pi/2)$, онда је $\pi - (x + 2k\pi) \in [-\pi/2, \pi/2]$. ■

Теорема 2. *За произвољни реални број x важи*

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{за } x + 2k\pi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \pi - (x + 2k\pi), & \text{за } x + 2k\pi \in (\pi/2, 3\pi/2), \end{cases}$$

где је k цео број за који је $x + 2k\pi \in [-\pi/2, 3\pi/2)$.

Доказ. Како је $\sin x = \sin(x + 2k\pi) = \sin(\pi - (x + 2k\pi))$ и $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ само за $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, то је тврђење теореме тачно, јер

$$y = \arcsin(\sin x) \iff \sin x = \sin y \wedge y \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad \blacksquare$$

Пример 6. Нацртати график функције $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Сл. 5

Теорема 3. $(\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\,(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbf{Z}\,\})\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + k\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$ *за неко* $k \in \mathbf{Z}$.

Доказ. Како су тангенси леве и десне стране ове једнакости међусобно једнаки и како су бројеви $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $x + k\pi$ оба из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ над којим је тангенс инјективна функција, то је теорема тачна. $\blacksquare$

Теорема 4. $(\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\,k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\,\})\ \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + k\pi \in (0, \pi)$ *за неко* $k \in \mathbf{Z}$.

Доказ. Како су котангенси леве и десне стране једнакости међусобно једнаки и како су бројеви $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и $x + k\pi$ оба из интервала $(0, \pi)$ над којим је котангенс инјективна функција, то је теорема тачна. $\blacksquare$

Пример 7. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ за свако $x \in \mathbf{R}$.
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ за свако $x \in \mathbf{R}$.
$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\sqrt{3})) = \pi - \sqrt{3}$.

Пример 8. Нацртати графике функција
$f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $g(x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ и $h(x) = \arcsin(\cos x)$ (в. слику 6).

Сл. 6

Теорема 5. *Важе следећи идентитети:*

1. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *за* $x \in [-1,1]$,
2. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ *за* $x \in [-1,1]$,
3. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *за* $x \in \mathbf{R}$,
4. $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *за* $x \in \mathbf{R}$,
5. $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *за* $x \in \mathbf{R}$,
6. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *за* $x \in (-1,1)$,
7. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ *за* $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$,
8. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$ *за* $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
9. $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ *за* $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$,
10. $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *за* $x \in (-1,1)$,
11. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$ *за* $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
12. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ *за* $x \in [-1,1]$,
13. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$ *за* $x \in \mathbf{R}$,
14. $\arccos(\sin x) = \dfrac{\pi}{2} - x$ *за* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$,
15. $\arcsin(\cos x) = \dfrac{\pi}{2} - x$ *за* $x \in [0, \pi]$,
16. $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *за* $x \in \mathbf{R}$.

Сл. 7

Доказ. Докажимо само једнакост под 7, јер се остале слично доказују. Из $\triangle OBD \sim \triangle OCA$ следи $BD : OB = CA : OC$, одакле је $\operatorname{tg}(\arccos x) : 1 = \sqrt{1-x^2} : x$ и најзад $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. ■

Теорема 6.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{за } xy < 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{за } xy > 1 \text{ и } x > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{за } xy > 1 \text{ и } x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{за } xy = 1 \text{ и } x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{за } xy = 1 \text{ и } x < 0. \end{cases}$$

Сл. 8

Доказ. Нека је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi/2$. Тада је $x > 0$, $y > 0$ и имамо ситуацију као на слици 8. Како је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi/2$ и $\operatorname{arctg} x = \overset{\frown}{AB}$, $\operatorname{arctg} y = \overset{\frown}{AE}$, то мора бити $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$, а одатле следи $AF = DC$, тј. $y = DC$. Сада из $\triangle OAG \sim \triangle OAF$ следи $AG : AO = AO : AF$, тј. $x : 1 = 1 : y$, односно $xy = 1$. Истим путем у назад из $xy = 1$ и $x > 0$ следи $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi/2$. Ако је $x<0$ и $xy=1$, тада због непарности функције arctg, на основу претходног следи да је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi/2$.

Збир $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (-\pi/2, \pi/2)$ ако и само ако је $xy<1$, што је очевидно из разматрања са слике 8. И сада из

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} \tag{1}$$

следи $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$, јер је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Поново из разматрања са слике 8 је јасно да $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (\pi/2, \pi)$ важи ако и само ако је $xy>1$ и $x>0$. У том случају из (1) следи $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \pi) = \dfrac{x+y}{1-xy}$, а одатле је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \pi = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$, јер је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \pi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Аналогно се показује да је $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (-\pi, -\pi/2)$ ако и само ако је $xy>1$ и $x<0$ и да је у том случају $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$. ■

Пример 9.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \pi/4, & \text{за } x > -1, \\ -3\pi/4, & \text{за } x < -1. \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} = \begin{cases} -\pi/4, & \text{за } x < 1, \\ 3\pi/4, & \text{за } x > 1. \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2, & \text{за } x > 0, \\ -\pi/2, & \text{за } x < 0. \end{cases}$$

Ови примери су последица теореме 6.

Теорема 7.

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} -\pi - 2\operatorname{arctg} x, & \textit{за } x \in (-\infty, -1], \\ 2\operatorname{arctg} x, & \textit{за } x \in [-1, 1], \\ \pi - 2\operatorname{arctg} x, & \textit{за } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Доказ. Ако је $\sin z_1 = \sin z_2$ и ако су $z_1,\ z_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, онда је $z_1 = z_2$. Нека је сада $z_1 = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ и $z_2 = 2\operatorname{arctg} x$. Јасно је да $z_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$ за свако $x \in \mathbf{R}$, а да би z_2 био из интервала $[-\pi/2, \pi/2]$, мора бити $x \in [-1, 1]$, па је $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$ за $x \in [-1,1]$, јер је

$$\sin\left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = 2\sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x) = 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Узмимо сада да је $x \in (-\infty, -1]$. Тада је $-\pi - 2\operatorname{arctg} x \in (-\pi/2, 0)$, па је због $\sin\left(\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \sin(-\pi - 2\operatorname{arctg} x)$ и због $x \in (-\infty, -1]$, тј. $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$,

$-\pi - 2\operatorname{arctg} x \in (-\pi/2, 0)$, тачна једнакост $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2\operatorname{arctg} x$. Аналогно се показује да за $x \in [1, \infty)$ важи једнакост $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi - 2\operatorname{arctg} x$, јер су тада и лева и десна страна једнакости из интервала $(0, \pi/2)$, а синус леве и десне стране су једнаки. ■

Пример 10. Наћи све природне бројеве m, n и k, за које је $\operatorname{arctg} m + \operatorname{arctg} n = k\pi/4$.

Решење. На основу теореме 6, $\operatorname{arctg} m + \operatorname{arctg} n = \pi/2$ за $m = n = 1$, а ако је $(m, n) \neq (1, 1)$, тада је $\operatorname{arctg} m + \operatorname{arctg} n = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{m+n}{1-mn}$. Тако први случај даје решење $(m, n, k) = (1, 1, 2)$, а у другом случају је $\operatorname{arctg} \dfrac{m+n}{1-mn} = \dfrac{1}{4}(k-4)\pi$, одакле следи $\dfrac{m+n}{1-mn} \in \{-1, 0, 1\}$. Ако је $\dfrac{m+n}{1-mn} = -1$, тј. $m(n-1) = n+1$, онда је $(m, n) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$, па су $(2, 3, 3)$ и $(3, 2, 3)$ још два решења. Ако је $\dfrac{m+n}{1-mn} = 0$, онда решења нема, а ако је $\dfrac{m+n}{1-mn} = 1$, тј. $m(n+1) = 1-n$, онда очевидно опет нема решења, јер су m и n природни бројеви. Значи, скуп свих решења је $\{(1, 1, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 3)\}$.

Пример 11.

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{за } x \in (-\infty, 0), \\ \pi/2, & \text{за } x = 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{за } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Ово је последица теореме 5.13 и примера 9.

Теорема 8. *Ако за реалне бројеве x и y важи $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$, тада је*

$$\arcsin x + \arcsin y =$$
$$= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{за } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2 \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{за } x > 0,\ xy > 0 \text{ и } x^2+y^2 > 1, \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{за } x < 0,\ xy > 0 \text{ и } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

Доказ. Ако је $xy \leqslant 0$, тада је очевидно $\arcsin x + \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Лако се показује да је и за $x^2 + y^2 \leqslant 1$ такође $\arcsin x + \arcsin y \in [-\pi/2, \pi/2]$. И сада, како су синуси леве и десне стране једнакости у првом случају једнаки (тј. износе $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$), то је тврђење теореме у првом случају доказано. Слично се доказује и у остала два случаја. ■

Теорема 9. *Ако за реалне бројеве x и y важи $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$, тада је*

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & \text{за } x + y \geqslant 0, \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & \text{за } x + y < 0. \end{cases}$$

Доказ. Како је $\arccos x + \arccos y \in [0, \pi]$ за $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ и $x + y \geqslant 0$ и како косинус и леве и десне стране једнакости износи $xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, то је тврђење у првом случају тачно. У другом случају је $\arccos x + \arccos y \in (\pi, 2\pi]$ и $2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \in (\pi, 2\pi]$, па је због једнакости косинуса обеју страна тврђење тачно и у овом случају (рестрикција косинуса над интервалом $(\pi, 2\pi]$ је инјективна функција!). ■

И на крају покажимо како ће нам ова знања омогућити да докажемо да је један неодређени интеграл елементарна функција.

Пример 12. Израчунати $I = \displaystyle\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

Овај задатак се налази у многим збиркама математичке анализе, као на пример у Демидовичу, али је на жалост у свима њима дат погрешан резултат. О чему се, наиме, ради. Решавајући овај интеграл методом парцијалне интеграције $\left(u = \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x},\ dv = dx\right)$ долази се до

$$I = x \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - (2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\operatorname{sgn}(1-x) + C,$$

што јесте тачно над интервалом $(0,1)$ и јесте тачно над интервалом $(1,\infty)$, али *није* тачно над $(0,\infty)$, јер добијена функција има прекид у тачки 1. Користећи теорему 7 добија се

$$I = (x+1)\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + C, \quad \text{за } x \in (0,1),$$
$$I = (x+1)\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\sqrt{x} - \pi + C, \quad \text{за } x \in (1,\infty).$$

Да бисмо уклонили прекид у тачки 1, узмимо да је $I = (x+1)\arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2 + C$ за $x \in (0,1)$ и $I = (x+1)\arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\sqrt{x} - 2 + C$ за $x \in (1,\infty)$, односно $I = (x+1)\arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2(1-\sqrt{x})\operatorname{sgn}(1-x) + C$, тј.

$$I = (x+1)\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + 2\sqrt{1 + x - 2\sqrt{x}} + C,$$

што јесте елементарна функција и јесте решење задатка над $(0,\infty)$.