Др Владимир Јанковић

О АНАЛОГОНИМА ЛАГРАНЖОВЕ ТЕОРЕМЕ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

§0 Увод

За Лагранжову теорему о средњој вредности може се рећи да представља најважнију теорему диференцијалног рачуна. Она не важи за векторске функције реалне променљиве, али зато постоји њен аналогон који у диференцијалном рачуну у нормираним просторима игра ону улогу коју класична Лагранжова теорема игра у класичном диференцијалном рачуну.

Теорема. *Нека је непрекидна функција f која пресликава одсечак $[a,b]$ у нормиран простор Y диференцијабилна у интервалу (a,b). Постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је*

$$\|f(a)-f(b)\| \leqslant \|f'(c)\|(b-a).$$

У [1] се може наћи веома кратак али нееелементаран доказ ове теореме, који користи Хан-Банахову теорему о продужењу линеарноиг функционала. Нешто сложенији али елементаран доказ може да се нађе у [2]. У уџбеницима француских аутора ([3], [4], [5]) појављује се доказ који је нешто сложенији од претходна два, али зато даје могућност уопштавања ове теореме на случај када функција f има десни (или леви) извод на интервалу (a,b). У §2 овог чланка дат је други доказ овог уопштења. Основни алат у овом доказу је аналогон Лагранжове теореме за реалне функције реалне променљиве које имају десни извод. Пошто је ова теорема интересантна независно од доказа у коме је искоришћена у овом чланку, њој је посвећен §1.

§1 Теореме о средњој вредности за реалну функцију реалне променљиве која има десни извод

Теорема 1. *Нека непрекидна функција f која пресликава одсечак $[a,b]$ у скуп реалних бројева има десни извод у свакопј тачки интервала (a,b). Ако је $f(a)=f(b)$, онда постоје c', $c'' \in (a,b)$ такви да је*

$$f'_+(c') \leqslant 0, \quad f'_+(c'') \geqslant 0.$$

Доказ. Ако је функција f константна, за c' и c'' можемо узети произвољне тачке из интервала (a,b). Претпоставимо да функција f није константна. Тада постоји $c \in (a,b)$ такво да је $f(c) \neq f(a) = f(b)$. Нека је нпр. $f(c) < f(a) = f(b)$. Постоји реалан број k такав да је $f(c) < k < f(a) = f(b)$. Нека је

$$G = \{\, x \in (a,b) \mid f(x) < k \,\}.$$

Скуп G је непразан и отворен. Он се може представити као унија дисјунктних отворених интервала. Нека је c' леви крај једног од њих. Како $c' \notin G$, то је $f(c') \geqslant k$. Због непрекидности функције f је $f(c') \leqslant k$. Следи да је $f(c') = k$. Како је $f(x) < k$ ако x припада горе поменутом интервалу, то је $f'_+(c') \leqslant 0$. Нека је $c'' = \sup G$. Како $c'' \notin G$, то је $f(c'') \geqslant k$. Због непрекидности функције f је $f(c'') \leqslant k$. Следи да је $f(c'') = k$. Како је $f(x) \geqslant k$ за $x \in [c'', b]$, то је $f'_+(c'') \geqslant 0$. ∎

Теорема 2. *Нека непрекидна функција f која пресликава одсечак $[a, b]$ у скуп реалних бројева има десни извод у свакој тачки интервала (a, b). Постоје c', $c'' \in (a, b)$ такви да је*

$$f'_+(c')(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant f'_+(c'')(b-a).$$

Доказ. Функција $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ задата са

$$g(x) = (f(b) - f(a))(x-a) - (f(x) - f(a))(b-a)$$

задовољава услове претходне теореме. Зато постоје c' , $c'' \in (a, b)$ такви да је

$$g'_+(c') \leqslant 0, \quad g'_+(c'') \geqslant 0.$$

Како је

$$g'_+(x) = f(b) - f(a) - f'_+(x)(b-a),$$

то је

$$f'_+(c')(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant f'_+(c'')(b-a). \quad ∎$$

§2 Теореме о средњој вредности за векторску функцију реалне променљиве која има десни извод

Лема *Нека функција f која пресликава интервал (a, b) у нормиран простор Y има десни извод у тачки $c \in (a, b)$. Функција g дефинисана на интервалу (a, b) са $g(x) = \|f(x)\|$ има десни извод у тачки c и важи*

$$|g'_+(c)| \leqslant \|f'_+(c)\|.$$

Доказ. Како је

$$\begin{aligned} \left| \frac{\|f(x)\| - \|f(c) + (x-c)f'_+(c)\|}{x-c} \right| &\leqslant \frac{\|f(x) - f(c) - (x-c)f'_+(c)\|}{|x-c|} \\ &= \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - f'_+(c) \right\|, \end{aligned}$$

то је

$$\lim_{x \to c_+} \frac{\|f(x)\| - \|f(c) + (x-c)f'_+(c)\|}{x-c} = 0.$$

Како је функција $x \mapsto \|f(c) + (x-c)f'_+(c)\|$ конвексна, она има десни извод у тачки c, тј. постоји

$$\lim_{x \to c_+} \frac{\|f(c) + (x-c)f'_+(c)\| - \|f(c)\|}{x-c}.$$

Следи да постоји
$$\lim_{x\to c_+}\frac{\|f(x)\|-\|f(c)\|}{x-c},$$
односно да функција g има десни извод у тачки c. Како је
$$|g(x)-g(c)| = \big|\,\|f(x)\|-\|f(c)\|\,\big| \leqslant \|f(x)-f(c)\|,$$
то је
$$\begin{aligned}|g'_+(c)| &= \left|\lim_{x\to c_+}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right| = \lim_{x\to c_+}\frac{|g(x)-g(c)|}{x-c}\\ &\leqslant \lim_{x\to c_+}\frac{\|f(x)-f(c)\|}{x-c} = \left\|\lim_{x\to c_+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right\| = \|f'_+(c)\|. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Теорема 3. *Нека непрекидна функција f која пресликава одсечак $[a,b]$ у нормиран простор Y има десни извод у свакој тачки интервала (a,b). Постоји тачка $c\in(a,b)$ таква да је*
$$\|f(a)-f(b)\| \leqslant \|f'_+(c)\|(b-a).$$

Доказ. Функција $g\colon [a,b]\to \mathbf{R}$ задата са
$$g(x)=\|f(x)-f(a)\|$$
задовољава услове теореме 2. Зато постоји $c\in(a,b)$ такво да је
$$|g(b)-g(a)| \leqslant |g'_+(c)|(b-a).$$
Како је $|g'_+(c)| \leqslant \|f'_+(c)\|$, то је
$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f'_+(c)\|(b-a). \quad \blacksquare$$

На сличан начин може да се докаже следеће уопштење претходне теореме.

Теорема 4. *Нека непрекидна функција f која пресликава одсечак $[a,b]$ у нормиран простор Y нема десни извод у највише пребројиво много тачака интервала (a,b). Постоји тачка $c\in(a,b)$ таква да је*
$$\|f(a)-f(b)\| \leqslant \|f'_+(c)\|(b-a).$$

Доказ препуштамо читаоцу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин: *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1981.

[2] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York

[3] H. Cartan: *Calcul Différentiel. Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967.

[4] L. Schwartz: *Analyse Mathématique*, Hermann, Paris 1967.

[5] J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1969.