MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XVIII (2)(2012), 19-23 **ISSN 1986-5228 (o)**
Osnove matematike

Neke nove relacije na skupovima

Milijana Milovanović[1] i Daniel A. Romano[2]

Sažetak: U nedavno publikovanim radovima Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin i Han Guiwen uveli su i analizirali nove klase relacija: normalne relacije, dualno normalne relacije, konjugativne i dualno konjugativne relacije. U ovom tekstu, kao ilustracija tih novih relacija, analizirajći koncept koji su pomenuti autori primjenili, analiziran je koncept normalnih relacija na skupu, uveden u radu [5]. Data je i jedna karakterizacija ovog pojma. Dati su potrebni i dovoljni uslovi da relacija anti-uređenja $\leq^C$ bude normalna.

Ključne riječi i fraze: normalna relacija

Abstract. In recent published papaers [3], [4] and [5] concepts of normal, dually normal, conjugative and dually conjugative relations are introduced and analzyed by Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin and Han Guiwen In this paper, as ilustration of the concept applied in mentioned papers, normal relations on a poset, introduced in article [5], is analyzed. A characterizations of normal relations are obtained. In addition, particulary we show when the anti-order relation $\leq^C$ is normal.

Math. Subject Classif. (2010): 97E60
ZDM Subject Classif. (2010): E60
Keywords: normal relations

1 Uvod

Neka je X neprazan skup. Svaki podskup $\rho \subseteq X \times X$ je relacija na skupu X. Sa $\mathcal{B}(X)$ označavamo skup svih binarnih relacija na skupu X. Za $\alpha,\beta \in \mathcal{B}(X)$ definišemo

$$\beta \circ \alpha = \{(x,z)\in X\times X : (\exists y\in X)((x,y)\in \alpha \wedge (y,z)\in \beta)\}.$$

Relacija $\beta \circ \alpha$ je komponat relacija α i β. Sem toga, definišemo,

$$\alpha^{-1} = \{(x,y)\in X\times X : (y,x)\in \alpha\},\ \ \alpha^C = X\times X \setminus \alpha.$$

Nedefinisani pojmovi i oznake korišteni u ovom tekstu mogu se naći u bilo kojoj knjizi iz teorije skupova.

U nedavno publikovanim radovima Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin i Han Guiwen uvedene su i analizirane nove klase relacija: normalne relacije ([5]), dualno

[1] Pedagoški fakultet, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b., Bosna i Hercegovina, e-mail: milijanamilovanovic21@gmail.com
[2] Pedagoški fakultet, 76300 Bijeljina, Semberskih ratara b.b., Bosna i Hercegovina, e-mail: bato49@hotmail.com

normalne relacije ([4]), konjugativne i dualno konjugativne relacije ([3]). U ovom tekstu analiziran je koncept koji su pomenuti autori primjenili, a kao ilustracija tih novih relacija, analiziran je koncept normalnih relacija na skupu, uveden u radu [5]. Data je i jedna karakterizacija ovog pojma. Dati su potrebni i dovoljni uslovi da relacija anti-uređenja $\leq^C$ bude normalna.

Tekst može da posluži za osvježenje kursa 'Osnove matematike' na studijama matematike prvog ciklusa, odnosno kursa 'Početni matematički pojmovi' studijskog programa predškolskog vaspitanja drugog / trećeg ciklusa.

2 Normalna relacija

U literaturi i istraživačkim člancima poznate su više vrsta relacija na skupovima (tj. elemenati polugrupe $(\mathscr{B}(X), \circ)$). Neke od njih su navedene u slijedećoj definiciji.

Definicija. Za relaciju $\alpha \in \mathscr{B}(X)$ kažemo da je:

(1) *regularna* ako postoji relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takva da je

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha.$$

(2) ([4]) *dualno normalna* ako postoji relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takva da je

$$\alpha = (\alpha^C)^{-1} \circ \beta \circ \alpha.$$

(3) ([3]) *konjugativna* ako postoji relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takva da je

$$\alpha = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha.$$

(4) ([3]) *dualno konjugativna* ako postoji relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takva da je

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}.$$

(5) ([7]) *kvazi-regularna relacija* ako postoji relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takva da je

$$\alpha = \alpha^C \circ \beta \circ \alpha.$$

Prvu karakterizaciju regularnih relacija dao je Zareckii ([9]). Ovu klasa relacija izučavali su i Markowski ([6]), Schein ([8]) i Xu Xiao-quan i Liu Yingming ([10]) (pogledati na primjer, i tekstove [1] i [2]).

Definicija. ([5]) Za relaciju $\alpha \in \mathscr{B}(X)$ kažemo da je *normalna relacija* ako postoji relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takva da je

$$\alpha = \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}.$$

Da familija takvih relacija nije prazna pokazuje sljedeća analiza. Ako je relacija $\alpha \subseteq X \times X$ takva da je α^C injektivna i totalna, tada vrijedi $\alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1} = Id_X$. Za takvu relaciju vrijedi $\alpha = \alpha \circ Id_X = \alpha \circ \alpha^C \circ (\alpha^C)^{-1}$. Dakle, relacija α je normalna relacija. Analogno, budući da za injektivnu i totalnu relaciju $\alpha \subseteq X \times X$ vrijedi $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id_X$, imamo $\alpha^C = \alpha^C \circ Id_X = \alpha^C \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^C \circ \alpha \circ ((\alpha^C)^C)^{-1}$ što znači da za takvu relaciju α relacija α^C je normalna relacija.

Naša prva tvrdnja je adaptacija jednog rezultata (Teorem 1) iz [8]. Pogledati takođe Lemmu 1 u tekstu [2].

Lema. Za zadanu relaciju $\alpha \in \mathscr{B}(X)$, relacija $\alpha^* = (\alpha^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C)^C$ je maksimalan element u skupu relacija $\beta \in \mathscr{B}(X)$ takvih da je

$$\alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha.$$

Dokaz: Prvo, podsjetimo se da je

$$\max\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\} = \cup\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}.$$

Neka je $\tau \in \mathcal{B}(X)$ uzeto po volji tako da je $\alpha \circ \tau \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$. Dokažimo da vrijedi $\tau \subseteq \alpha^*$. Ako to ne bi bilo tačno, postojao bi par $(x,y) \in \tau$ takav da je $\neg((x,y) \in \alpha^*)$. Ovo posljednje daje:

$$\begin{aligned}(x,y) \in \alpha^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C &\Leftrightarrow (\exists u,v \in X)((x,u) \in \alpha^C \wedge (u,v) \in \alpha^C \wedge (v,y) \in \alpha^{-1})\\ &\Leftrightarrow (\exists u,v \in X)((u,x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (u,v) \in \alpha^C \wedge (y,v) \in \alpha)\\ &\Rightarrow (\exists u,v \in X)((u,x) \in (\alpha^C)^{-1} \wedge (x,y) \in \tau \wedge (y,v) \in \alpha \wedge (u,v) \in \alpha^C)\\ &\Rightarrow (\exists u,v \in X)((u,v) \in \alpha \circ \tau \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha \wedge (u,v) \in \alpha^C).\end{aligned}$$

Dobili smo kontradikciju. Dakle, mora biti $\tau \subseteq \alpha^*$.

S druge strane, treba dokazati da relacija α^* zadovoljava inkluziju

$$\alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha.$$

Uzmimo $(x,y) \in \alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$ po volji. To znači da postoje elementi u, v u X takvi da je $(x,u) \in (\alpha^C)^{-1}$, $(u,v) \in \alpha^*$ i $(v,y) \in \alpha$. Dakle, iz

$$(u,x) \in \alpha^C,\ \neg((u,v) \in \alpha^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C),\ (y,v) \in \alpha^{-1},$$

imamo $\neg((x,y) \in \alpha^C)$. Zaista, kad bi bilo $(x,y) \in \alpha^C$ imali bi $(u,v) \in \alpha^{-1} \circ \alpha^C \circ \alpha^C$ što je nemoguće. Imamo, prema tome, $(x,y) \in \alpha$ i, znači, $\alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$.

Na osnovu izloženog, zaključujemo da je α^* maksimalan element u familiji relacija $\tau \in \mathcal{B}(X)$ takvih da je $\alpha \circ \tau \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$.

U sljedećoj tvrdnji dajemo jednu karakterizaciju normalnih relacija.

Teorem. *Za relaciju* α *na skupu X sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) α *je normalna relacija;*

(2) *Za* $(x,y) \in \alpha$ *postoje elementi* $u,v \in X$ *takvi da vrijedi*:

 (a) $(u,x) \in \alpha^C$, $(v,y) \in \alpha$

 (b) $(\forall s,t \in X)((u,s) \in \alpha^C \wedge (v,t) \in \alpha \Rightarrow (s,t) \in \alpha)$*;*

(3) $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$.

Dokaz: (1) $\Rightarrow$ (2). Neka je α normalna relacija, tj. neka postoji relacija β takva da vrijedi $\alpha = \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}$. Neka je $(x,y) \in \alpha$. Tada postoje elementi $u,v \in X$ takvi da je

$$(x,u) \in (\alpha^C)^{-1},\ (u,v) \in \beta,\ (v,y) \in \alpha.$$

Odavde slijedi da postoje elementi $u,v \in X$ takvi da je $(u,x) \in \alpha^C$ i $(v,y) \in \alpha$. Ovim je uslov (a) dokazan. Preostaje da provjerimo uslov (b). Neka su elementi $s, t \in X$ uzeti po volji takvi da je $(u,s) \in \alpha^C$ i $(v,t) \in \alpha$. Sada, iz $(s,u) \in (\alpha^C)^{-1}$, $(u,v) \in \beta$, $(v,t) \in \alpha$ slijedi $(s,t) \in \alpha \circ \beta \circ \alpha^C = \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Uzmimo relaciju

$$\alpha' = \{(u,v) \in X \times X : (\forall s,t \in X)((u,s) \in \alpha^C \wedge (v,t) \in \alpha \Rightarrow (s,t) \in \alpha)\}$$

i pokažimo da vrijedi $\alpha \circ \alpha' \circ (\alpha^C)^{-1} = \alpha$. Uzmimo $(x,y) \in \alpha$. Tada postoje elementi $u,v \in X$ takvi da vrijede iskazi (a) i (b). Imamo $(u,v) \in \alpha'$, prema definiciji relacije α'. Dalje, iz $(x,u) \in (\alpha^C)^{-1}$, $(u,v) \in \alpha'$ i $(v,y) \in \alpha$ slijedi $(x,y) \in \alpha \circ \alpha' \circ (\alpha^C)^{-1}$. Ovim je pokazano da vrijedi $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha' \circ (\alpha^C)^{-1}$. Obrnuto, neka je par $(x,y) \in \alpha \circ \alpha' \circ (\alpha^C)^{-1}$ uzet po volji. Dakle, postoje elementi $u,v \in X$ takvi da je $(x,u) \in (\alpha^C)^{-1}$, $(u,v) \in \alpha'$ i $(v,y) \in \alpha$, odnosno takvi da je $(u,x) \in \alpha^C$ i $(v,y) \in \alpha$. Odavde, prema definiciji relacije α', slijedi da je $(x,y) \in \alpha$ obzirom da je $(u,v) \in \alpha'$. Dakle, $\alpha \circ \alpha' \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$. Ovim je pokazano da je relacija α normalna relacija na skupu X jer postoji relacija α' takva da je $\alpha \circ \alpha' \circ (\alpha^C)^{-1} = \alpha$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3). Neka je α normalna relacija. Tada postoji namjenje jedna relacija β takva da je $\alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} = \alpha$. Budući da je $\alpha^* = \cup\{\beta \in \mathcal{B}(X) : \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha\}$, imamo $\beta \subseteq \alpha^*$ pa time i $\alpha = \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$. Obrnuto, neka za relaciju α vrijedi $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$. Kako je α^* maksimalna relacija među relacijama β za koje vrijedi $\alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$, zaključujemo da je $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1} \subseteq \alpha$, odakle slijedi da je $\alpha = \alpha \circ \alpha^* \circ (\alpha^C)^{-1}$, tj. relacija α je normalna relacija.

Posljedica. *Neka je* $(X,\leq)$ *parcijalno uređen skup. Relacija* $\leq^C$ *je normalna na* X *ako i samo ako za svako* $x,y \in X$ *takve da je* $x \leq^C y$ *postoje* $u,v \in X$ *takvi da vrijedi*:

(a') $u \leq x \wedge v \leq^C y$, i

(b') $(\forall z \in X)(u \leq^C z \vee v \leq z)$.

Dokaz. Neka je relacija $\leq^C$ normalna na X i neka za elemente $x,y \in X$ vrijedi $x \leq^C y$. Tada, prema prethodnom teoremu, postoje elementi $u,v \in X$ takvi da vrijedi

(a) $u \leq^{CC} x \wedge v \leq^C y$

(b) $(\forall s,t \in X)((u \leq^{CC} s \wedge v \leq^C t) \Rightarrow s \leq^C t)$,

odnosno

(a) $u \leq x \wedge v \leq^C y$

(b) $(\forall s,t \in X)((u \leq s \wedge v \leq^C t) \Rightarrow s \leq^C t)$.

Neka je element z uzet po volji i ako u prethodnu formulu (b) stavimo $z = s = t$ dobićemo $(u \leq z \wedge v \leq^C z) \Rightarrow z \leq^C z$ što je kontradikcija. Dakle, $\neg(u \leq z \wedge v \leq^C z)$. Odavde slijedi

$$u \leq^C z \vee v \leq z.$$

Obrnuto, uzmimo po volji elemente $x,y \in X$ za koje je $x \leq^C y$. Postoje elementi $u,v \in X$ takvi da relacija $\leq^C$ zadovoljava formule (a') i (b') u iskazu teorema:

(a') $u \leq x \wedge v \leq^C y$, i

(b') $(\forall z \in X)(u \leq^C z \vee v \leq z)$.

Uzmimo elemente $s,t \in X$, po volji, takve da je $u \leq s \wedge v \leq^C t$. Ako bi bilo $s \leq t$, imali bi $u \leq s \leq t$ i $v \leq^C t$. S druge strane, prema (b'), je $u \leq^C t \vee v \leq t$ što, u oba slučaja, daje kontradikciju. Prema tome, mora biti $s \leq^C t$. Dakle, elementi u i v zadovoljavaju uslov (b) prethodnog teorema. Prema tome, relacija $\leq^C$ je normalna relacija.

Primjer 1. ([5]) Neka je $(X,\leq)$ parcijalno uređen skup u kojem relacija $\leq$ ispunjava uslov (v. [10]) $(\forall x,y \in X)(x \leq^C y \Rightarrow (\exists t \in X)(t < x \wedge t \leq^C y))$, pri čemu je $t < x \Leftrightarrow (t \neq x \wedge t \leq x)$. Pokazaćemo da je $\leq^C$ normalna relacija. Neka su x i y elementi skupa X uzeti po volji takvi da vrijedi $x \leq^C y$. Tada postoji element $u \in X$ takav da je $u < x \wedge u \leq^C y$. Dalje, zbog $u \leq^C y$ postoji element $v \in X$ za koji vrijedi $v < u \wedge v \leq^C y$. Neka su, sada, $s,t \in X$ proizvoljno izabrani elementi takvi da je $u \leq s \wedge v \leq^C t$. Ako bi bilo $s \leq t$, imali bi $v < u \leq s \leq t$ i $v < \leq^C t$, što je kontradikcija. Prema tome, imamo $s \leq^C t$. Ovim je pokazano da relacija $\leq^C$ na skupu X, koja zadovoljava ovaj dodatni uslov, zadovoljava uslove (a') i (b') prethodne tvrdnje. Dakle, $\leq^C$ je normalna relacija.

Primjer 2. Neka je α normalna relacija na skupu X. Tada postoji relacija β na X takva da je $\alpha = \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}$. Ako je θ relacija ekvivalencije na X, determinišimo relaciju α/θ na sljedeći način:

$$\alpha/\theta = \{(a\theta,b\theta) \in X/\theta \times X/\theta : (a,b)\in \alpha\}$$

i β/θ analogno. Tada vrijedi

$$\alpha/\theta = \alpha/\theta \circ \beta/\theta \circ ((\alpha/\theta)^C)^{-1}.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}(a\theta,b\theta)\in \alpha/\theta &\Leftrightarrow (a,b)\in \alpha \circ \beta \circ (\alpha^C)^{-1}\\ &\Leftrightarrow (\exists u,v\in X)((a,u)\in (\alpha^C)^{-1} \wedge (u,v)\in \beta \wedge (v,b)\in \alpha)\\ &\Leftrightarrow (\exists u,v\in X)(\neg((u,a)\in \alpha) \wedge (u,v)\in \beta \wedge (v,b)\in \alpha)\\ &\Leftrightarrow (\exists u\theta,v\theta\in X/\theta)(\neg((u\theta,a\theta)\in \alpha/\theta) \wedge (u\theta,v\theta)\in \beta/\theta \wedge (v\theta,b\theta)\in \alpha/\theta)\\ &\Leftrightarrow (\exists u\theta,v\theta\in X/\theta)((u\theta,a\theta)\in ((\alpha/\theta)^C)^{-1} \wedge (u\theta,v\theta)\in \beta/\theta \wedge (v\theta,b\theta)\in \alpha/\theta)\\ &\Leftrightarrow (a\theta,b\theta)\in \alpha/\theta \circ \beta/\theta \circ ((\alpha/\theta)^C)^{-1}\end{aligned}$$

Ovim je pokazano da je relacija α/θ normalna relacija na X/θ.

Zahvala: Autori se zahvaljuju Jiang Guanghao, jednom od autora normalnih relacija, na njegovoj susretljivosti tokom studiranja njegovih radova.

Reference:

[1] H.J.Bandelt: *Regularity and complete distributivity*. Semigroup Forum 19(1980), 123–126

[2] H.J.Bandelt: *On regularity classes of binary relations*. In: *Universal Algebra and Applications*. Banach Center Publications, vol. 9(1982), 329–333

[3] Jiang Guanghao and Xu Luoshan: *Conjugative Relations and Applications*. Semigroup Forum, 80(1)(2010), 85-91.

[4] Jiang Guanghao and Xu Luoshan: *Dually normal relations on sets;* Semigroup Forum, DOI: 10.1007/s00233-011-9364-0 (To appear)

[5] Jiang Guanghao, Xu Luoshan, Cai Jin and Han Guiwen: *Normal Relations on Sets and Applications*; Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6(15)(2011), 721 – 726

[6] G.Markowsky: *Idempotents and product representations with applications to the semigroup of binary relations*. Semigroup Forum, 5(1972), 95–119

[7] D.A.Romano: *Quasi-regular relation on sets*; (To appear)

[8] B.M.Schein: *Regular elements of the semigroup of all binary relations*. Semigroup Forum, 13(1976), 95–102

[9] A. Zarecki˘i*: The semigroup of binary relations*. Mat. Sb. 61(3)(1963), 291–305 (In Russian)

[10] Xu Xiao-quan and Liu Yingming. *Relational representations of hypercontinuous lattices*, in: Domain Theory, Logic, and Computation, Kluwer Academic Publisher, 2003, 65-74.

(Pristiglo u redakciju 08.02.2012; revidirana verzija 21.02.2012. Dostupno na internetu od 12.03.2012)